NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3 Prøveeksamen - LF**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av 10 flervalgsoppgaver og 4 langsvarsoppgaver. På langsvarsoppgavene må du begrunne alle svar, og alle utregninger må vises.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 15

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Flervalgsoppgaver

Oppgave 1 La a, b, x og y være reelle tall, og la i være slik at $i^2 = -1$. Da vil produktet $(x + yi)(a + bi)$ være lik

- ☐ $xa + ybi$
- ☐ $xa - ybi$
- ☐ $xy + yb + (xb - ya)i$
- ☐ $xa - yb + (xb + ya)i$
- ☐ $xa + yb + (xb + ya)i$

Løsning: Vi regner ut

$$(x + yi)(a + bi) = xa + xbi + ayi + ybi^2 = xa - yb + (xb + ya)i.$$

Riktig svar er altså alternativ fire.

Oppgave 2 For alle komplekse tall a har vi

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} =$$

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ a
- ☐ a^3
- ☐ a^9

Løsning: Vi ser at alle kolonnene i matrisen er like, og de er dermed ikke lineært uavhengige. Dette er ekvivalent med at determinanten er lik 0.

For sikkerhets skyld kan vi også regne ut determinanten på vanlig måte ved kofaktorekspansjon:

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} - a \cdot \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}.$$

Determinanten til hver av undermatrisene blir $a^2 - a^2 = 0$, så

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} = a \cdot 0 - a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0.$$

Oppgave 3 La $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ være en lineærtransformasjon gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen til T er da gitt ved

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Løsning: Kolonnene i standardmatrisen er $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$ der $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ er standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^2$, så la oss se på hva transformasjonen gjør med disse vektorene.

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen er altså matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4 Dersom vektoren $\mathbf{b}$ er en av kolonnene i matrisen A, så vil ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- ☐ alltid være løsbar
- ☐ aldri være løsbar
- ☐ være løsbar noen ganger, avhengig av A og $\mathbf{b}$
- ☐ være løsbar noen ganger, kun avhengig av A
- ☐ være løsbar noen ganger, kun avhengig av $\mathbf{b}$

Løsning: La oss tenke litt på hva vi egentlig prøver å gjøre når vi løser ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vi prøver å finne en lineærkombinasjon av kolonnene i A slik at denne lineærkombinasjonen er lik $\mathbf{b}$. Anta som et eksempel at den første kolonnen i A er lik $\mathbf{b}$, altså at

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Da kan vi fint skrive $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av kolonnene i A, nemlig lineærkombinasjonen $1 \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_n$. Dette er ekvivalent med å sette

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Generelt, hvis $\mathbf{b}$ er den i-te kolonnen i A, vil en vektor som har 1 i posisjon i og 0 ellers være en løsning på ligningen. Svaret på oppgaven er altså at dersom $\mathbf{b}$ er en av kolonnene i A, så vil ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *alltid være løsbar*.

Oppgave 5 Hvor mange underrom har $\mathbb{C}^2$?

- ☐ Nøyaktig to: $\{0\}$ og $\mathbb{C}^2$
- ☐ Nøyaktig to: $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$
- ☐ Nøyaktig tre: $\{0\} = \mathbb{C}^0, \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ og $\mathbb{C}^2$
- ☐ Nøyaktig fire: $\{0\}, \mathbb{C} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{C}$ ('aksene') og $\mathbb{C}^2$
- ☐ Uendelig mange

Løsning:

Underrom til $\mathbb{C}^2$ er $\{0\}$, $\mathbb{C}^2$, og alle linjer gjennom origo. Siden det er uendelig mange linjer gjennom origo, er det uendelig mange underrom.

Oppgave 6 For en lineært uavhengig mengde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ med vektorer i et vektorrom V, så vil $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

☐ alltid være lineært avhengig
☐ aldri være lineært avhengig
☐ noen ganger være lineært avhengig, og andre ganger lineært uavhengig
☐ aldri være lineært uavhengig
☐ alltid være lineært uavhengig

Løsning:

Hver delmengde av en lineært uavhengig mengde er lineært uavhengig. Dette innebærer at #5 er riktig. Siden #2 er ekvivalent, er det også riktig.

Oppgave 7 La V og W være vektorrom slik at $\dim V = 5$ og $\dim W = 3$. La $T : V \to W$ være en surjektiv lineærtransformasjon. Hva kan vi da si om kjernen til T?

☐ $\dim \ker(T) \geq 2$
☐ $\dim \ker(T)$ kan være både $0, 1$ og 2
☐ $\dim \ker(T) = 2$
☐ $\dim \ker(T) = 1$
☐ $\dim \ker(T) = 0$

Løsning:

Vi har $\dim \ker(T) = 2$. Generelt har vi $\dim(V) = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T)$. Her vet vi $\dim(V) = 5$, og $\operatorname{im}(T) = W$ fordi T er surjektiv. Dette innebærer $\dim \operatorname{im}(T) = 3$, og resultatet følger.

Oppgave 8 La A være en $m \times n$-matrise og la B være en $n \times m$-matrise, slik at $AB = I_m$ ($m \times m$-identitetsmatrisen). La $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være gitt ved $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og la $f_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ være gitt ved $f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$. Hvilken av følgende påstander er sann?

☐ $m \geq n$, A er injektiv, B er surjektiv
☐ $m \leq n$, A er surjektiv, B er injektiv
☐ $m = n$, A og B er inverterbare (bijeksjoner)

☐ $m \leq n$, A er injektiv, B er surjektiv
☐ $m \geq n$, A er surjektiv, B er injektiv

Løsning:

Fra $AB = I_n$ ser vi at $AB\mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$. Dette viser at alle vektorer $\mathbf{x}$ har formen $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ for noen $\mathbf{y}$ (ta $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$), og f_A er surjektiv. Hvis $B\mathbf{x} = B\mathbf{y}$, så har vi $\mathbf{x} = AB\mathbf{x} = AB\mathbf{y} = \mathbf{y}$, som viser at f_B er injektiv. Hver av disse viser $m \leqslant n$.

Oppgave 9 Hvilken av følgende påstander er riktig? For en $n \times n$-matrise A har vi

☐ $\det(A) = 0$ medfører at $\operatorname{rank}(A) = 0$
☐ $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq 1$
☐ $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq n - 1$
☐ $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \geq n - 1$
☐ $\det(A) = 0$ medfører at $\operatorname{rank}(A) = n$

Løsning:

Betingelsen $\det(A) = 0$ tilsvarer at A ikke er inverterbar, og for en kvadratisk matrise tilsvarer det $\operatorname{rank}(A) \neq n$ eller $\operatorname{rank}(A) \leqslant n - 1$.

Oppgave 10 La A være en $n \times n$-matrise og la $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha to lineært uavhenige løsninger. Hvilken av de følgende påstandene er riktig?

☐ $\operatorname{rank}(A) = 2$
☐ $\operatorname{rank}(A) \geq 2$, og tilfellet $\operatorname{rank}(A) > 2$ kan forekomme
☐ $\operatorname{rank}(A) \leq n$, og tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n$ kan forekomme
☐ $\operatorname{rank}(A) \leq n - 1$ og tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n - 1$ kan forekomme
☐ $\operatorname{rank}(A) \leq n - 2$ og tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n - 2$ kan forekomme

Løsning:

Hvis det er to løsninger, lineært uavhengige eller ikke, er løsningsrommet til den homogene ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ minst 1–dimensjonal. Det innebærer $\operatorname{rank}(A) \leqslant n - 1$. Tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n - 1$ er mulig: hvis løsningsrommet til den homogene ligningen er 1–dimensjonalt, kan løsningsrommet til den inhomogene ligningen være en linje som ikke passerer gjennom $\mathbf{0}$, og den inneholder to lineært uavhengige vektorer.

Langsvarsoppgaver

Oppgave 11

a) Gi et eksempel på en matrise A, slik at

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi legger først merke til at vi multipliserer A med en 3×1-vektor og får ut en 4×1- vektor. Det betyr at A må være en 4×3-matrise. Så la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}.$$

Ligningen vi startet med gir da at

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 4 \\ d + 2e + 3f &= 5 \\ g + 2h + 3i &= 6 \\ j + 2k + 3l &= 8 \end{aligned}$$

Vi ser at hvis vi for eksempel setter $a = 4, d = 5, g = 6, j = 8$, og resten lik null, så har vi en løsning på dette systemet. Med andre ord vil matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gjøre susen. Merk at det finnes flere og mer spennende løsninger her, så hvis du har fått noe annet kan det være like riktig som denne løsningen.

b) Gi et eksempel på to 2×2–matriser A og B slik at A og B er diagonaliserbare, men $A + B$ ikke er diagonaliserbar.

Løsning: For at en 2×2–matrise skal være diagonaliserbar må den ha to lineært uavhengige egenvektorer. Vi vet at hvis en 2×2–matrise har to distinkte egenverdier, så vil den også ha to lineært uavhengige egenvektorer og dermed være diagonaliserbar. For noen matriser er det også enklere å finne egenverdiene enn for andre matriser. For eksempel vil elementene langs diagonalen til en triangulærmatrise være nettopp egenverdiene til matrisen (fordi determinanten til en triangulærmatrise bare er produktet av elementene langs diagonalen). Så hvis vi velger to triangulærmatriser (for eksempel øvre triangulære) A og B som begge har distinkte elementer langs diagonalen, vil disse være diagonaliserbare. Men summen av disse må være en matrise som ikke har distinkte elementer langs diagonalen. I tillegg kan den ikke være en diagonalmatrise, for da ville den vært diagonaliserbar. Summen $A + B$ må altså være en triangulærmatrise der elementene langs diagonalen er like, og vi har et ikke-null element utenfor diagonalen. Det finnes mange eksempler vi kan velge, men la oss for eksempel si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da vil både A og B være diagonaliserbare, mens

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

vil ikke være diagonaliserbar, siden egenrommet til $A + B$ bare har dimensjon 1.

c) Gi et eksempel på et polynom $p(x)$ slik at $p(x) = 2^x$ for $x = 0, 1, 2, 3$.

Løsning: Oppgaven gir oss fire punkter som polynomet skal gå gjennom: $(0, 1), (1, 2), (2, 4)$ og $(3, 8)$. Generelt vil n punkter i planet unikt bestemme et polynom av grad $n-1$, så disse fire punktene vil unikt bestemme et tredjegradspolynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hvis vi setter inn punktene våre her får vi ligningssystemet

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 8 \end{cases}$$

som har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right].$$

Nå er det bare å bite tennene sammen og gausseliminere. Gjør man det skal man ende opp med $a = \frac{1}{6}, b = 0, c = \frac{5}{6}$ og $d = 1$. Med andre ord: et eksempel på et polynom som tilfredsstiller kravet gitt i oppgaven er

$$p(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1.$$

d) Gi et eksempel på fire vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ i $\mathbb{R}^3$, slik at enhver mengde bestående av tre av disse vektorene danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: La oss starte med standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Vi vet at disse tre er lineært uavhengige og at de utspenner $\mathbb{R}^3$. Nå kan vi sette en fjerde vektor $\mathbf{v}$ som summen av standardbasisvektorene:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Hvorfor funker dette? Vi ser at hvis vi velger et hvilket som helst par av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$, vil ikke $\mathbf{v}$ ligge i spennet til dette paret. For eksempel vil $\mathbf{v}$ ikke ligge i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, fordi en vektor i dette spennet alltid vil ha 0 som tredje koordinat. Dermed vil ikke $\mathbf{v}$ ligge i samme plan som noe par $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ av standardbasisvektorer og dermed vil mengden $\{\mathbf{v}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ være lineært uavhengig og utspenne $\mathbb{R}^3$ (så lenge $i \neq j$, altså vi velger ulike standardbasisvektorer). Så hvis vi vilkårlig velger tre av vektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

vil disse tre altså danne en basis for $\mathbb{R}^3$.

e) La p og q være komplekse tall. Gi et eksempel på en matrise på formen

$$\begin{bmatrix}0 & ?\\1 & ?\end{bmatrix}$$

som har karakteristisk polynom $\lambda^2 + p\lambda + q$.

Løsning: La $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$. Matrisen A har karakteristisk polynom

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -a \\ -1 & \lambda - b \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda - b) - a \\ &= \lambda^2 - b\lambda - a. \end{aligned}$$

Sammenligner vi med polynomet vi ønsker, altså $\lambda^2 + p\lambda + q$, ser vi at vi kan sette $a = -q$ og $b = -p$. Det vil si at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -q \\ 1 & -p \end{bmatrix}$$

har det ønskede karakteristiske polynomet.

Oppgave 12 Så lenge noen kan huske har det vært reiserestriksjoner i Matteland, og det betyr at innbyggerne bare har to destinasjoner de kan reise til på påskeferie: Gaussedal, eller RadRom Resort. Man kan også holde seg hjemme. Påskeferieforsker Otto Gonal har notert seg følgende trend:

- Hvis man har vært hjemme et år, så er det null prosent sannsynlighet for at man blir hjemme året etter, 1/4 sannsynlighet for at man reiser til Gaussedal og 3/4 sannsynlighet for at man reiser til RadRom Resort.
- Hvis man har tilbrakt påsken i Gaussedal, er det like stor sjanse for at man besøker Gaussedal igjen neste år, som at man blir hjemme, men av én eller annen grunn er det ingen som drar til RadRom Resort året etter at de har vært i Gaussedal.
- Har man vært på RadRom Resort, så er det like stor sjanse både for at man blir hjemme året etter, kommer tilbake til RadRom Resort eller drar til Gaussedal.

a) Finn den stokastiske matrisen M som representerer hvordan innbyggerne endrer påskeferieplaner fra år til år.

Løsning: La G betegne at man drar til Gaussedal, la R betegne at man drar til RadRom Resort og la H betegne at man holder seg hjemme. Vi sorterer informasjonen i en tabell:

har vært	H	G	R	**drar til**
	0	1/2	1/3	H
	1/4	1/2	1/3	G
	3/4	0	1/3	R

Altså kan endringen av fordeling av påsketurister fra år til år beskrives ved den stokastiske matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

b) Er M regulær? Husk å begrunne svaret ditt.

Løsning: Matrisen er regulær, fordi det finnes et positivt heltall k slik at alle elementene i M^k er strengt større enn null. Faktisk trenger vi ikke se lenger enn til $k = 2$:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & 5/18 \\ 3/8 & 3/8 & 13/36 \\ 1/4 & 3/8 & 13/36 \end{bmatrix}.$$

c) Gitt at en innbygger i Matteland har vært hjemme et år, hva er sannsynligheten for at hun drar til RadRom Resort to år etterpå?

Løsning: Vi finner denne sannsynligheten som tredje element i første kolonne i matrise, altså er sannsynligheten 1/4.

d) Otto Gonal ser ikke for seg at reiserestriksjonene letter med det første. Hvordan vil innbyggerne i Matteland fordele seg på de ulike feriestedene i det lange løp? Hvilken destinasjon blir den mest populære?

Løsning: Matrisen M er regulær og vil dermed ha en unik likevektsvektor, som er en egenvektor tilhørende egenverdi $\lambda = 1$. Så la oss først finne en egenvektor tilhørende 1. En slik vektor er en ikke-triviell løsning av systemet $(M - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så la oss gausseliminere matrisen $(M - I_3)$, der I_3 som vanlig er 3×3-identitetsmatrisen.

$$M - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -3/8 & 5/12 \\ 0 & 3/8 & -5/12 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -10/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8/9 \\ 0 & 1 & -10/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får en fri variabel $x_3 = s$, og vi får videre at $x_2 = \frac{10}{9}s$ og $x_1 = \frac{8}{9}s$. Det betyr at egenvektorene tilhørende $\lambda = 1$ er på formen

$$\mathbf{v} = s \begin{bmatrix} 8/9 \\ 10/9 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og likevektsvektoren (egenvektoren hvor elementene summerer til 1) blir da

$$\mathbf{q} = \frac{1}{8/9 + 10/9 + 1} \begin{bmatrix} 8/9 \\ 10/9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/27 \\ 10/27 \\ 9/27 \end{bmatrix}.$$

Påskevinneren på lang sikt vil altså være Gaussedal, med RadRom Resort hakk i hæl, mens det minst populære alternative er å være hjemme.

Oppgave 13 La $\mathbf{e}_1$ være den første standardbasisvektoren i $\mathbb{R}^3$. La R_x, R_y og R_z være lineærtransformasjonene som roterer vektorer med en vinkel $\pi/2$ om henholdsvis x-aksen, y-aksen og z-aksen i $\mathbb{R}^3$ (bruk høyrehånds-regelen).

a) Hva er de tre vinklene i trekanten med hjørner i $\mathbf{e}_1$, $R_y(\mathbf{e}_1)$ og $R_z(\mathbf{e}_1)$?

Løsning:

For å finne vinkelen i punktet $R_y(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_3$, beregner vi differansen til de to andre punktene, nemlig $\mathbf{e}_1$ og $R_z(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_1 - (-\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{e}_2 - (-\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kaller disse vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Deretter finner vi

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1$$

og

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2} = \|\mathbf{w}\|.$$

Vi får vinkelen fra

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}\right) = \arccos(1/2) = \pi/3 = 60°.$$

Beregningene for det andre punktet er like og gir samme resultat, det vil si $\pi/3 = 60°$. Da må resultatet også være det samme for det tredje punktet, siden vinkelsummen i en trekant er 180°.

b) Hva er avstanden mellom $R_y(\mathbf{e}_1)$ og midtpunktet på linjestykket mellom $\mathbf{e}_1$ og $R_z(\mathbf{e}_1)$?

Løsning:

Midtpunktet mellom $\mathbf{e}_1$ og $R_z(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ er

$$\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Differansen mellom den vektoren og $R_y(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_3$ er

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den etterspurte avstanden er lengden av den vektoren, altså

$$\sqrt{1/4 + 1/4 + 1} = \sqrt{3/2}.$$

c) Finn egenverdiene og egenrommene til sammensetningen $R_x R_y R_z$.

Løsning:

Transformasjonen R_x gjør ingenting med $\mathbf{e}_1$, roterer $\mathbf{e}_2$ til $\mathbf{e}_3$, og roterer $\mathbf{e}_3$ til $-\mathbf{e}_2$. Derfor er matrisen for R_x med hensyn til standardbasis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformasjonen R_y gjør ingenting med $\mathbf{e}_2$, roterer $\mathbf{e}_3$ til $\mathbf{e}_1$, og roterer $\mathbf{e}_1$ til $-\mathbf{e}_3$. Derfor er matrisen for R_y med hensyn til standardbasis

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformasjonen R_z gjør ingenting med $\mathbf{e}_3$, roterer $\mathbf{e}_1$ til $\mathbf{e}_2$, or roterer $\mathbf{e}_2$ til $-\mathbf{e}_1$. Derfor er matrisen for R_z med hensyn til standardbasis

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi setter disse sammen og får matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

for $R_xR_yR_z$. Vi ser straks at $\mathbf{e}_2$ er en egenvektor for egenverdien -1. Vektorene $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_3$ byttes ut. Dette betyr at summen $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ er fast, så det er en egenvektor for egenverdien 1, og at deres differanse $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ er en annen egenvektor for egenverdi -1.

For å oppsummere, er linjen gjennom $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ egenrom for egenverdien 1, og planet utspent av $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ er egenrom for egenverdien -1.

d) La T være lineærtransformasjonen med standardmatrise

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kan du skrive T som en sammensetning $S_1 \circ \cdots \circ S_n$, der hver transformasjon S_i er én av R_x, R_y eller R_z?

Løsning:

Det er ikke mulig. På den ene siden har vi $\det(T) = (-1)^3 = -1$. På den annen side er determinanten for en rotasjonsmatrise 1, og det antyder

$$\det(S_1 \circ \cdots \circ S_n) = \det(S_1) \cdot \cdots \cdot \det(S_n) = 1^n = 1.$$

Oppgave 14 La $\mathcal{P}$ være vektorrommet bestående av polynomer med reelle koeffisienter. La $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt på $\mathcal{P}$.

Løsning: Vi må vise at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tilfredsstiller kravene om symmetri, linearitet og positivitet. Vi ser på symmetri først:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)dx = \langle q(x), p(x) \rangle.$$

Så sjekker vi linearitet (a og b er her skalarer):

$$\begin{aligned}
\langle p(x), aq(x) + br(x) \rangle &= \int_{-1}^{1} p(x) \left(aq(x) + br(x)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(ap(x)q(x) + bp(x)r(x)\right) dx \\
&= a \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx + b \int_{-1}^{1} p(x)r(x)dx \\
&= a\langle p(x), q(x) \rangle + b\langle p(x), r(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Til sist sjekker vi positivitet:

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)^2 dx.$$

Polynomet $p(x)^2$ vil alltid være større enn eller lik null, og dermed vil arealet under grafen også være større enn eller lik null. Når er integralet lik null? Dette skjer bare når $p(x)^2$, og dermed $p(x)$ er konstant lik null. Grunnen er at hvis polynomet ikke er konstant lik null, vil ikke arealet under grafen heller være lik null. Altså vil $\langle p(x), p(x) \rangle \geq 0$, og $\langle p(x), p(x) \rangle = 0$ bare når $p(x)$ er konstant lik null.

Oppsummert tilfredsstiller $\langle \cdot, \cdot \rangle$ både symmetri, linearitet og positivitet, og er dermed et indreprodukt på $\mathcal{P}$.

b) Finn projeksjonen av polynomet $p(x) = x^3$ ned på underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 1.

Løsning: Underrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 1, la oss kalle det P_1, har standardbasis $(1, x)$. Siden

$$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

er basisen ortogonal. Det betyr at vi kan regne ut projeksjonen $P_{\mathcal{P}_1}(x^3)$ slik:

$$P_{\mathcal{P}_1}(x^3) = P_1(x^3) + P_x(x^3) = \frac{\langle 1, x^3\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 + \frac{\langle x, x^3\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x.$$

Vi regner ut de ulike indreproduktene:

$$\begin{aligned}
\langle 1, x^3\rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^3 dx = 0 \text{ (så } \frac{\langle 1, x^3\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = 0) \\
\langle x, x^3\rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x^3 \, dx = \frac{2}{5} \\
\langle x, x\rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Vi får altså

$$P_{\mathcal{P}_1}(x^3) = P_x(x^3) = \frac{2/5}{2/3} \cdot x = \frac{3}{5}x.$$

c) La $\mathcal{P}_2$ være underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Finn et reelt tall t slik at basisen $\mathcal{B} = (1, x, x^2 - t)$ er ortogonal med hensyn til indreproduktet beskrevet over (du trenger ikke vise at $\mathcal{B}$ er en basis for alle reelle tall t).

Løsning: Dersom basisen $\mathcal{B} = (1, x, x^2 - t)$ skal være ortogonal, må vi ha

$$\langle 1, x\rangle = 0, \langle 1, x^2 - t\rangle = 0 \text{ og } \langle x, x^2 - t\rangle = 0.$$

Vi vet fra tidligere at $\langle 1, x\rangle = 0$, så der er alt greit. Vi har også

$$\langle x, x^2 - t\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - t) \, dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - xt) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}tx^2\right]_{-1}^{1} = 0,$$

så x og $x^2 - t$ er ortogonale uavhengig av hva t er. Til slutt har vi

$$\langle 1, x^2 - t\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - t) \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - tx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - 2t.$$

Vi vil ha

$$\frac{2}{3} - 2t = 0,$$

som har løsning $t = \frac{1}{3}$. Altså er basisen $\mathcal{B} = (1, x, x^2 - t)$ ortogonal når $t = \frac{1}{3}$.