

TMA4115 - projekson II

mars 2022

Oppgave 1

Vis at matrisen av projeksjonen P_v i planet ned til linjen gjennom origo med retningsvektor

$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq 0$ med hensyn til standardbasis $\{e_1, e_2\}$ er gitt ved

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix},$$

og sjekk at $A^2 = A$.

Løsning:

Husk at $P_v(w) = \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$ og at matrise av P_v med hensyn til basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ har kolumner

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \begin{bmatrix} a^2 a^2 + abab & a^3 b + ab^3 \\ a^3 b + ab^3 & b^2 b^2 + abab \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \begin{bmatrix} (a^2 + b^2)a^2 & (a^2 + b^2)ab \\ (a^2 + b^2)ab & (a^2 + b^2)b^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

(a) Finn ortogonal basis for $U = \text{span}\{1, x, x^2\} \subset C([0, 1])$ med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(b) Finn ortogonal projekson $P_U(h)$, der $h(x) = e^x$.

(c) Sammenligner svaret i (b) med Taylor approksimasjon $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Løsning:

(a) Vi kalles to kontinuerlige funksjoner f og g ortogonal hvis $\langle f, g \rangle = 0$. Da

$$\langle 1, x \rangle = \int_0^1 x dx = 1/2, \quad \langle 1, x^2 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = 1/3, \quad \langle x, x^2 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = 1/4,$$

er $1, x$ og x^2 ikke ortogonal i det indreproduktrommet $(C([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Vi bruker Gram-Schmidt metode for å finne en ortogonal basis $\{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}$ til $U = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Vi velger $u_1(x) = 1$ og $u_2(x) = v_2(x) - P_{u_1(x)}(v_2(x)) = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} \cdot 1$. Da $\int_0^1 1 dx = 1$ og $\int_0^1 x dx = 1/2$, få vi

$$u_2(x) = x - 1/2.$$

Vi skal finne en funksjon $u_3(x)$ som står ortogonal på $U_2 := \text{span}\{u_1(x), u_2(x)\}$. Man kan brukes ortogonal projekson $P_{U_2}(v_3)$ av $v_3(x)$ i underrommet U_2 og husk at $v_3(x) - P_{U_2}(v_3(x))$ ligger i $U_2^\perp$:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= v_3(x) - P_{U_2}(v_3) \\ &= x^2 - \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} - \frac{\langle x - 1/2, x^2 \rangle}{\langle x - 1/2, x - 1/2 \rangle} (x - 1/2) \\ &= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{1} - \frac{\int_0^1 (x - 1/2)x^2 dx}{\int_0^1 (x - 1/2)^2 dx} (x - 1/2) \\ &= x^2 - 1/3 - x + 1/2 \\ &= x^2 - x + 1/6. \end{aligned}$$

Derfor $\{1, x - 1/2, x^2 - x + 1/6\}$ er ortogonal basis.

(b) Den ortogonal projekson av e^x i U er gitt med

$$P_U(e^x) = \frac{\langle e^x, u_1(x) \rangle}{\langle u_1(x), u_1(x) \rangle} u_1(x) + \frac{\langle e^x, u_2(x) \rangle}{\langle u_2(x), u_2(x) \rangle} u_2(x).$$

La oss se på de indreproduktene:

$$\langle e^x, u_1(x) \rangle = \int_0^1 e^x dx = e - 1,$$

$$\begin{aligned} \langle e^x, u_2(x) \rangle &= \int_0^1 e^x (x - 1/2) dx \\ &= \int_0^1 e^x dx - 0.5 \int_0^1 e^x dx \\ &= \left[e^x (x - 1) - 0.5 e^x \right]_0^1 \\ &= 1 - e/2 + 1/2 \\ &= (3 - e)/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle e^x, u_3(x) \rangle &= \int_0^1 e^x (x^2 - x + 1/6) dx \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 x e^x dx + \frac{\int_0^1 e^x dx}{6} \\
&= \left[e^x (x^2 - 2x + 2) - e^x (x - 1) - e^x / 6 \right]_0^1 \\
&= (7e - 19)/6,
\end{aligned}$$

og

$$\langle u_2 x, u_2(x) \rangle = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 dx = 1/180.$$

Derfor

$$P_U(e^x) = e - 1 + \frac{(e - 1)/2}{1/12} (x - 1/2) + \frac{(7e - 19)/16}{1/180} (x^2 - x + 1/6) = (210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + (39e - 105),$$

som er circa $P_U(e^x) = 0.84x^2 + 0.85x + 1$.

- (c) $1 + x + x^2/2$ er en god approksimasjon i nærheten av $x = 0$ mens $P_U(e^x)$ er en god approksimasjon i hele interval $[0, 1]$. Plot differanse av disse to funksjoner å finne ut mer om dette sammenheng.