Kapittel 11

Diagonalisering

I dette kapittelet skal vi bruke det vi har lært om egenverdier og egenvektorer til å analysere matriser og deres tilsvarende lineærtransformasjoner.

Eksempel 11.1. Husk at en diagonalmatrise er en matrise med bare 0-ere utenom diagonalen.

Vi begynner med et eksempel og ser på diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Det er lett å multiplisere D med vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$. Men det er også enkelt å multiplisere D med seg selv. For eksempel får vi D^5 ved

$$D^5 = D{\cdot}D{\cdot}D{\cdot}D{\cdot}D = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi prøver det samme med A, dvs beregne A^5 for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

blir det mye mer tidskrevende.

Men vi har et triks som gjør oppgaven å beregne A^5 mye enklere. Vi lærte at matrisen vi bruker for å beskrive en lineærtransformasjon avhenger av basisen vi velger for vektorrommene. Altså kan vi stille spørsmålet:

Kan vi finne en basis for $\mathbb{R}^2$ slik at lineærtransformasjonen kan beskrives av en diagonalmatrise?

Husk at en basisskifte for $\mathbb{R}^2$ er gitt ved en inverterbar 2×2-matrise P.

Fordi det er mye lettere å jobbe med en diagonalmatrise, kan vi stille spørsmålet: finnes det en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at

$$A = PDP^{-1}?$$

Da ville oppgaven å beregne A^5 blitt mye enklere:

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})^5 \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \\ &= PD^5P^{-1}, \end{aligned}$$

fordi $P^{-1} \cdot P = I_2$, og D^5 er lett å beregne.

For å finne slike matriser D og P husker vi fra forrige kapittel, at A har egenverdier $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -5$ med henholdsvis $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ som egenvektorer. Det betyr at vi har

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1 \text{ og } A\mathbf{v}_2 = (-5)\mathbf{v}_2.$$

En annen måte å skrive disse to ligningene er å skrive egenverdiene på diagonalen i en matrise D og så skrive egenvektorene som kolonnene i en matrise P:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

slik at

$$AP = PD.$$

Nå observerer vi at P er inverterbar med invers

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Altså kan vi gange begge sidene av $AP = PD$ med P^{-1} og får

$$A = PDP^{-1}.$$

Nå kan vi faktisk beregne A^k for alle k med formelen

$$A^k = PD^kP^{-1}. \qquad \triangle$$

Det vi har gjort i eksempelet er å erstatte en matrise A med en diagonalmatrise D, med andre ord har vi diagonalisert A.

Definisjon. Vi sier at en $n \times n$-matrise A er *diagonaliserbar* hvis det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at

$$A = PDP^{-1}. \qquad \triangle$$

Vi sier da at P diagonaliserer A.

Ikke alle matriser er diagonaliserbare. Derfor trenger vi en metode for å sjekke om vi kan diagonalisere A. Det gir oss følgende resultat:

Teorem 11.2. *En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.*

Bevis. Først antar vi at A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ og tilhørende egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. For hver egenvektor gjelder

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k.$$

Som i eksemplet kan vi organisere disse n ligningene i en matriseligning

$$AP = PD,$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

og

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er $n \times n$-matrisen P inverterbar. Det betyr det finnes en invers P^{-1} og vi får

$$A = PDP^{-1}.$$

Med andre ord A er diagonaliserbar.

Nå antar vi at A er diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ der D er en diagonalmatrise og P er en inverterbar matrise. La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ være kolonnene i P og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ være tallene som står på diagonalen i D. Fra ligningen $A = PDP^{-1}$, får vi $AP = PD$, altså en likhet av matriser:

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Det viser at

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \text{ for alle } k.$$

Fordi P er inverterbar, må vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ være lineært uavhengige. Især er alle forskjellige fra nullvektoren. Det viser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige egenvektorer for A. □

I forrige kapittel så vi at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier alltid er lineært uavhengige. Sammen med teorem 11.2 gir det:

Teorem 11.3. *Hvis en $n \times n$-matrise A har n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.*

Hvis noen av egenverdiene for A har algebraisk multiplisitet større enn 1, er det fortsatt mulig at A er diagonaliserbar. Det vi må undersøke er om det er mange nok lineært uavhengige egenvektorer allikevel.

Teorem 11.4. *En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n egenverdier og dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi λ er lik den algebraiske multiplisiteten til λ.*

Merk. La A være en reell $n \times n$-matrise. Det er mulig at A er diagonaliserbar som en kompleks matrise, selv om den ikke er diagonaliserbar som en reell matrise. Om A kun har komplekse egenverdier, kan vi ikke finne en passende *reell* diagonalmatrise. △

Vi kan reformulere dette ved hjelp av basiser.

Teorem 11.5. *En kompleks $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis for $\mathbb{C}^n$ som kun består av egenvektorer for A.*
En reell $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar som en reell matrise hvis og bare hvis det finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ som kun består av egenvektorer for A.

Dette resultatet motiverer følgende definisjon:

Definisjon. En lineærtransformasjon $T\colon V \to V$ kalles *diagonaliserbar* hvis det finnes en basis for V som kun består av egenvektorer for T. △

Da kan vi konkludere med det følgende resultatet fra tidligere teoremer og kapitler:

Teorem 11.6. *La $T\colon V \to V$ være en lineærtransformasjon. Vi antar at T er diagonaliserbar og at $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ er en basis som består av T sine egenvektorer. Da er matrisen som beskriver T med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ en diagonalmatrise D, med egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ til T på diagonalen.*

Eksempler

Vi skal nå se på en rekke eksempler.

Eksempel 11.7. Vi har sett på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og vet at egenverdiene for A er 2 og 4 (med algebraisk multiplisitet 2). Egenrommet til egenverdi 2 er

$$\operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til egenverdi 4 er

$$\operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi ser at vi har tre lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at A er diagonaliserbar med diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ △

Eksempel 11.8. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i$$

med egenrom $\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi i, og egenrom $\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi $-i$.

Det betyr at A er diagonaliserbar som en *kompleks* matrise med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Men vi kan ikke diagonalisere A som en *reell* matrise.

△

Eksempel 11.9. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdien til A er 1 med algebraisk multiplisitet 2 fordi

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2.$$

Egenrommet til 1 er nullrommet til matrisen

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er underrommet utspent av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Især er egenrommet endimensjonalt. Vi kan altså ikke finne to lineært uavhengige egenvektorer for A. Dette viser at A *ikke* er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise.

△

Eksempel 11.10. Det samme argumentet viser at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ikke er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise.

△

Oppgave

Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

For hvilke reelle tall a og b er A diagonaliserbar?

Mer om komplekse egenverdier

Når en reell $n \times n$-matrise A har komplekse egenverdier er det ved første øyekast ikke lenger så enkelt å se geometrisk hva virkningen av A på vektorer i $\mathbb{R}^n$ er. Vi skal nå se at det ligger ganske mye geometri i bakgunnen likevel, i hvert fall for 2×2-matriser.

La C være matrisen

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

med reelle tall a og $b \neq 0$. Vi kan beregne egenverdiene for C eller vi kan observere at

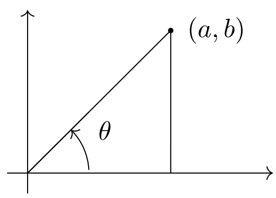
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bi \\ b + ai \end{bmatrix} = (a - bi)\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Altså er $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ en egenvektor til C med egenverdi $\lambda = a - bi$. Fordi $b \neq 0$, vet vi at $\bar{\lambda} = a + bi$ er den andre egenverdien til C med egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Hvis vi skriver $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ for lengden av vektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$, så kan vi skrive

$$C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

der θ er vinkelen mellom den positive x-aksen og linjen fra origo til punktet med koordinater (a, b).



Å gange en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ med matrisen $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ tilsvarer at vi ganger vektoren med tallet r, med andre ord, vi strekker eller krymper $\mathbf{v}$ med faktoren r. Å gange en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ med (rotasjons-)matrisen $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ tilsvarer å rotere $\mathbf{v}$ om vinkelen θ.

Altså har vi vist at å gange en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ med matrisen C tilsvarer å strekke og rotere $\mathbf{v}$.

Vi gjør altså følgende observasjon: at det å gange med matrisen C tilsvarer først en rotasjon og så en re-skalering, faktisk også gjelder for andre matriser med komplekse egenverdier.

Teorem 11.11. *La A være en reell 2×2-matrise med kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$, med $b \neq 0$, og la $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ være en egenvektor som hører til λ. Da kan vi faktorisere A på følgende måte:*

$$A = PCP^{-1} \quad \textit{med} \quad P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\mathbf{v} & \mathrm{Im}\,\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Teoremet sier at for å forstå virkningen av A på en vektor $\mathbf{x}$, kan vi skifte koordinater ved P^{-1} for å få $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$, rotere og strekke vektoren $\mathbf{u}$ ved C, og så skifte koordinatene tilbake.

Eksempel 11.12. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi finner egenverdiene til A:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \iff (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 &= 0 \\ \iff \lambda^2 - 4\lambda + 5 &= 0 \\ \iff (\lambda - 2)^2 + 1 &= 0 \\ \iff \lambda = 2 + i \text{ eller } \lambda &= 2 - i. \end{aligned}$$

Vi finner egenvektorer som hører til egenverdien $\lambda = 2 - i$. Da må vi bestemme nullrommet til matrisen $A - \lambda I_2$:

$$A - (2-i)I_2 = \begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A som hører til egenverdien $\lambda = 2 - i$.

Som i teoremet får vi $A = PCP^{-1}$ med matrisene

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

△

Symmetriske matriser

Definisjon. En reell matrise kalles *symmetrisk* dersom $A = A^T$. △

Eksempel 11.13. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -5 & 2 & -13 \\ 7 & -13 & 3 \end{bmatrix}$$

er symmetrisk. △

En reell 2×2-matrise A er symmetrisk hvis den har formen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker om denne matrisen er diagonaliserbar. Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \iff (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 &= 0 \\ \iff \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 &= 0 \\ \iff \lambda &= \frac{\pm\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} + a + c}{2}. \end{aligned}$$

Fordi $(a-c)^2 + 4b^2$ er et positivt reelt tall, ser vi at A har to *reelle* egenverdier.

Hvis $(a-c)^2 + 4b^2 \neq 0$, så er egenverdiene forskjellige. Det betyr at 2×2-matrisen A har to *forskjellige* egenverdier og er dermed diagonaliserbar. Hvis $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$, så må vi ha $a - c = 0$ og $b = 0$, altså er $A = a \cdot I_2$ en diagonalmatrise med egenrom hele $\mathbb{R}^2$.

Vi ser altså at en symmetrisk 2×2-matrise alltid er diagonaliserbar. Faktisk holder det vi nettopp fant ut i alle dimensjoner:

> **Teorem 11.14.** *La A være en* symmetrisk *$n \times n$-matrise. Da har A n* reelle *egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliserbar (som en reell matrise).*

Merk. Dette teoremet er fantastisk fordi for en vanlig $n \times n$-matrise er det nesten umulig å se med en gang om den er diagonaliserbar. Men for symmetriske matriser er det lett å se. △

> **Oppgave**
>
> Sjekk om matrisen
>
> $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
>
> er diagonaliserbar. Hvis den er diagonaliserbar, finn den tilsvarende diagonalmatrisen D og inverterbare matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

Eksempel 11.15. Vi ser på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \iff (1-\lambda)((6-\lambda)^2 - 4) & \\ - 2(2(6-\lambda) - 4) + 2(4 - 2(6-\lambda)) &= 0 \\ \iff \lambda^3 - 13\lambda^2 + 36\lambda &= 0 \\ \iff \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9) &= 0. \end{aligned}$$

Det viser at egenverdiene for B er 0, 4 og 9. Egenvektorerer er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Altså får vi $B = PDP^{-1}$ med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

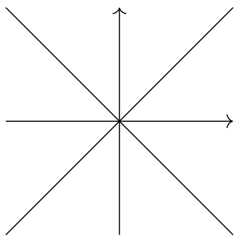
Merk. Det forrige eksempelet minner oss om at en matrise kan være diagonaliserbar uten å være inverterbar. $\triangle$

Symmetri og ortogonalitet

Tidligere så jobbet vi med ortogonalitet. Se litt nærmere på oppgaven og eksempelet vi nettop studerte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Underrommene av $\mathbb{R}^2$ utspent av egenvektorene $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ til A ligger ortogonalt på hverandre:



Ortogonale egenrom for A

Vi husker at vi kan sjekke om to vektorer i $\mathbb{R}^2$ er ortogonale ved å sjekke om deres indreprodukt er null:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Det samme fenomenet observerer vi for egenrommene for B. Egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ortogonale til hverandre:

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + 1 - 1 = 0,$$

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0,$$

$$\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 2 - 2 = 0.$$

Faktisk er det alltid slik for symmetriske matriser:

> **Teorem 11.16.** *La A være en reell* symmetrisk *$n \times n$-matrise. Egenvektorene til A tilhørende to distinkte egenverdier er ortogonale.*

Bevis. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to egenvektorer som hører til egenverdier henholdsvis λ_1 og λ_2. Vi beregner

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &\text{(nå bruker vi at A er symmetrisk: } A = A^T) \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot (A \cdot \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Vi vet altså at

$$0 = \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2.$$

Nå bruker vi at λ_1 og λ_2 er forskjellige, og får

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

$\square$

Definisjon. En $n \times n$-matrise er *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den har n ortogonale egenvektorer.

For en symmetrisk $n \times n$-matrise har vi vist at egenvektorene til forskjellige egenverdier er ortogonale til hverandre. Videre har vi at:

> **Teorem 11.17.** *En reell $n \times n$-matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk.*

Nå kan vi spørre oss; Hvorfor kaller vi $n \times n$-matriser med n ortogonale egenvektorer for ortogonalt diagonaliserbare? La oss se på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Den har tre ortogonale egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_2$. Hvis vi normaliserer disse vektorene får vi egenvektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, . \\ \mathbf{q}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi lager nå matrisen Q hvor kolonnevektorene er $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ og $\mathbf{q}_3$.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -3 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

så ser vi at Q^TQ er

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-4 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & 3 & 2\sqrt{2}\\ 1 & -3 & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Vi ser at $Q^{-1} = Q^T$. Altså får vi at $B = QDQ^T$ med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Matrisen Q er et eksempel på en spesiell type matriser, nemlig:

Definisjon. En reell $n \times n$-matrise er en *ortogonal matrise* dersom kolonnevektorene utgjør en ortonormal mengde vektorer. △

Vi kan se at alle ortogonale matriser er inverterbare og har sin egen transponert som inversmatrise. La

$$Q = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n\end{bmatrix}$$

være en $n \times n$ ortogonal matrise. Vi husker fra kapittel 9 at enhver ortogonal mengde vektorer er lineært uavhengige, så Q må være inverterbar. Multipliserer vi Q^T med Q får vi

$$Q^TQ = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^T\\ \mathbf{q}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{q}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_n\\ \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_n\end{bmatrix}.$$

Vektorene $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ er en ortonormal mengde, så vi vet at

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \begin{cases}1 & \text{hvis } i = j\\ 0 & \text{hvis } i \neq j\end{cases}.$$

Dermed får vi at $Q^TQ = I$, og siden inversmatrisen til en inverterbar matrise er unik har vi $Q^T = Q^{-1}$. Denne diskusjonen forklarer hvorfor $n \times n$-matriser med n ortogonale egenvektorer kalles ortogonalt diagonaliserbare:

Teorem 11.18. *La A være en reell symmetrisk $n \times n$-matrise. Da eksisterer det en diagonalmatrise D og en ortogonal matrise Q slik at $A = QDQ^T$.*

Oppgave

Hva kan vi si om determinanten til en ortogonal matrise Q i tillegg til at den ikke er null?

Hermitske matriser

For $n \times n$-matriser med *komplekse* elementer trengs det en liten tilpasning for å få lignende resultater som for reelle symmetriske matriser.

La A være en $n \times n$-matrise med $a_{ij} \in \mathbb{C}$ som element i rad i og kolonne j. Da skriver vi A^* for matrisen

$$A^* = \overline{A^T},$$

dvs. vi transponerer A og så komplekskonjugerer vi resultatet. Med andre ord, elementet i A^* i rad i og kolonne j er $\overline{a_{ji}}$.

Definisjon. En $n \times n$-matrise A kalles *hermitsk* hvis

$$A = A^*.$$

△

Merk. I en hermitsk matrise A må elemente på diagonalen være reelle tall fordi de oppfyller $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$.

Dessuten er en reell matrise hermitsk hvis og bare hvis den er symmetrisk. △

Til slutt har vi at:

Teorem 11.19. *En hermitsk $n \times n$-matrise har n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og er ortogonalt diagonaliserbar.*