Kapittel 13

Systemer av differensialligninger

I dette kapittelet skal vi bruke det vi har lært om lineær algebra til å studere systemer av differensialligninger. Vi begynner med en del teoretiske observasjoner. Så skal vi se på mange eksempler.

Vektorfunksjoner

En *vektorfunksjon* er en funksjon $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

der alle komponentene er funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Det er vanlig å tenke på en vektorfunksjon som en kurve i $\mathbb{R}^n$; en bane som en partikkel beveger seg langs når tiden t øker. Du oppfordres til å skissére eksemplene nedenfor.

Eksempel 13.1. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

tegner enhetssirkelen – uendelig mange ganger – i $\mathbb{R}^2$. Den fysiske tolkningen er en partikkel som beveger seg rundt origo langs enhetssirkelen i det uendelige. $\triangle$

Eksempel 13.2. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$$

tegner en spiralfjær langs z–aksen. Den er uendelig lang. $\triangle$

Eksempel 13.3. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

tegner den rette linjen utspent av vektoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

Eksempel 13.4. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

tegner den delen av linjen i forrige eksempel som ligger i første kvadrant. Forskjellen er at e^t tar på seg verdier i $(0, \infty)$ mens t går fra $-\infty$ til $+\infty$. $\triangle$

For å kunne bruke språket vi har lært i løpet av semesteret – språket som er lineær algebra – må vi jobbe med vektorrom. Husk at $\mathbb{R}^n$ og funksjoner fra reelle tall til reelle tall er vektorrom. En vektorfunksjon er jo bare en kombinasjon av disse. Derfor kan vi definere et vektorrom med addisjon

$$\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) + x_1(t) \\ y_2(t) + x_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) + x_n(t) \end{bmatrix},$$

og skalarmultiplikasjon

$$c\mathbf{y}(t) = c \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cy_1(t) \\ cy_2(t) \\ \vdots \\ cy_n(t) \end{bmatrix}.$$

Oppsummering:

Vektorfunksjoner utgjør et vektorrom.

Merk. I praksis fungerer addisjon og skalarmultiplikasjon som i $\mathbb{R}^n$, men nå er det en variabel t i hver komponent.

Vi skal herfra alltid anta at alle funksjonene som utgjør komponentene til $\mathbf{y}$ er kontinuerlig deriverbare. I Matematikk 2 har vi lært hvordan vi kan derivere en vektorfunksjon.

Teorem 13.5. *Den* deriverte *av en vektorfunksjon* $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *er lik vektorfunksjonen gitt ved å derivere hver komponent*

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Eksempel 13.6. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \cos t \end{bmatrix}$$

har deriverte

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} (t^2)' \\ (\cos t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

Systemer av differensialligninger

I dette kapittelet skal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alltid være en kvadratisk reell matrise. Det blir mer enn komplisert nok. Et *førsteordens lineært og homogent system av differensialligninger med konstante koeffisienter* er et sett med n ligninger og n ukjente funksjoner

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) \end{aligned}$$

Dette kan alternativt skrives

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

På kortform skriver vi enkelt og greit

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Den lange tittelen forkortes til *system.*

Siden matrisemultiplikasjon og derivasjon er lineære operasjoner får vi et resultat som ofte kalles *superposisjonsprinsippet.*

Teorem 13.7 (superposisjonsprinsippet)**.** *Løsningene til*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

utgjør et vektorrom. Det vil si at dersom $\mathbf{y}_1$ *og* $\mathbf{y}_2$ *er løsninger av systemet, så er* $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$ *en løsning for alle reelle tall* c_1 *og* c_2*.*

Bevis. Vi viser at løsningene utgjør et underrom av alle vektorfunksjoner. La $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2$ være to løsninger. Ønsket er at en vilkårlig lineærkombinasjon $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$ er en løsning igjen:

$$\begin{aligned} & (c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2)' \\ =& c_1\mathbf{y}_1' + c_2\mathbf{y}_2' && \text{derivasjon er lineært} \\ =& c_1A\mathbf{y}_1 + c_2A\mathbf{y}_2 && \mathbf{y}_1 \text{ og } \mathbf{y}_2 \text{ er løsninger} \\ =& A(c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) && \text{matrisemult. er lineært} \end{aligned}$$

$\square$

Løsningsteknikk for reell diagonaliserbare matriser

Vi skal nå diskutere en måte å løse et system på formen $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, dvs at vi må finne en deriverbar vektorfunskjon $\mathbf{y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ med $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Vi begynner med to eksempler:

Først ser vi på systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) \\ y_2'(t) &= -y_2(t). \end{aligned}$$

Vi har to ligninger, en som kun innebærer y_1 og en som kun innebærer y_2. Det betyr at vi kan løse hver ligning for seg selv. For i Matematikk 1 lærte vi at enhver løsning til ligningen $y_1'(t) = 3y_1(t)$ er på formen $y_1(t) = c_1e^{3t}$, og løsningen til $y_2'(t) = -y_2(t)$ er på formen $y_2(t) = c_2e^{-t}$ for to konstanter c_1 og c_2. Dermed løser vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} \\ c_2e^{-t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

systemet for alle valg av c_1 og c_2.

Nå ser vi på systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t). \end{aligned}$$

I dette tilfellet avhenger $y_1(t)$ av $y_2'(t)$ og $y_2(t)$ av $y_1'(t)$. Dette betyr at vi ikke kan anvende vår metode fra det første eksemplet.

Men det er lineær algebra som vil redde oss. For la oss se på matrisene som hører til de to systemene. Matrisen er i det første eksemplet

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

og i det andre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen D er en diagonalmatrise, mens A ikke er det. Men vi husker at matrisen A er *diagonaliserbar.* Egenverdiene til A er $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$ med egenvektorer henholdsvis $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vi bruker $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som kolonnene i matrisen $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ og får da

$$A = PDP^{-1}.$$

Systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ kan altså skrives om til $\mathbf{y}' = PDP^{-1}\mathbf{y}$. Å gange med matrisen P^{-1} betyr at vi bytter koordinatsystemet og utrykker vektorer med hensyn til en basis som består av egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ til A. Vi skriver

$$\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$$

for vektorfunksjonen med hensyn til den nye basisen. Fordi matrisen P^{-1} er konstant, kan vi derivere med hensyn på t som gir

$$\mathbf{x}'(t) = (P^{-1}\mathbf{y}(t))' = P^{-1}\mathbf{y}'(t).$$

Etter byttet av koordinater (dvs etter å gange med P^{-1} på begge sider) blir systemet bare

$$\mathbf{x}' = D\mathbf{x}.$$

Vi har sett at en basis for løsningsrommet til $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$ er

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{3t} \text{ og } \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{-t}.$$

Konverter tilbake til de gamle koordinatene ved å multiplisere med P – vi har $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{y}$, slik at $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$ – for å se at

$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{3t} \text{ og } P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{-t}$$

er en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Siden $P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}$ regner vi ut at

$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{3t},$$

og

$$P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-t}.$$

Den generelle løsningen til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er derfor pa formen

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{3t} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-t}.$$

Strategien vi brukte i eksemplet for å løse systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ fungerer faktisk for alle diagonaliserbare matriser. Vi formulerer dette i et teorem:

Teorem 13.8. *La A være en diagonaliserbar $n \times n$-matrise. Hvis $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots,$ $\mathbf{v}_n$ er n lineært uavhengige egenvektorer med tilhørende egenverdier λ_1, $\lambda_2, \ldots,$ λ_n, så er*

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t},$$

en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Med andre ord er

$$c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en generell løsning av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Bevis. La D være diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

og P være matrisen hvis kolonner er egenvektorene $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$:

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}.$$

Vi husker fra kapitlet om diagonalisering at vi har da $A = PDP^{-1}$. Vi bytter nå til en basis som består av egenvektorene til A og definerer den nye funksjonen $\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$. Fordi P^{-1} er konstant, vet vi $\mathbf{x}'(t) = P^{-1}\mathbf{y}'(t)$. Vektorfunksjonen $\mathbf{x}$ er en løsning til systemet $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$, dvs

$$\begin{bmatrix}x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 x_1(t)\\ \lambda_2 x_2(t)\\ \vdots\\ \lambda_n x_n(t)\end{bmatrix}$$

hvis og bare hvis

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 e^{\lambda_1 t}\\ c_2 e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ c_n e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

for reelle tall $c_1, \ldots, c_n$. Vi ser at for å løse systemet $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$ har vi friheten til å velge konstantene $c_1, \ldots, c_n$. Løsningsrommet til systemet $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$ er derfor et n-dimensjonalt reelt vektorrom. Vektorene $\mathbf{e}_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathbf{e}_n e^{\lambda_n t}$ danner en basis til løsningsrommet til $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$ fordi de er lineært uavhengige.

Nå bytter vi tilbake til $\mathbf{y}$ ved $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$. Vi ser at $\mathbf{y}$ er en løsning til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{y}$ er en løsning til systemet $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$. Med andre ord er P^{-1} en isomorfi mellom løsningsrommene. Det betyr at løsningsrommet til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ også er n-dimensjonalt. Derfor danner de n lineært uavhengige vektorene

$$P\mathbf{e}_1 e^{\lambda_1 t} = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, P\mathbf{e}_n e^{\lambda_n t} = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. □

Eksempel 13.9. Se på systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ med

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Siden matrisen er på trappeform ser vi at egenverdiene er 1, 2 og 4. Du kan sjekke at

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \text{ og } \begin{bmatrix}2\\3\\3\\2\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige egenvektorer med egenverdier henholdsvis 1, 2, 2 og 4. Teorem 13.8 gir oss den generelle løsningen

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} e^{t} + c_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_4\begin{bmatrix}2\\3\\3\\2\end{bmatrix} e^{4t}.$$

△

Merk. For et system $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ der A ikke er diagonaliserbar (hverken reell eller kompleks), dvs. der vi ikke kan finne n lineært uavhengige egenvektorer for A, fungerer løsningsmetoden vår delvis. Vi vet fremdeles at hvis det finnes en egenvektor $\mathbf{v}$ til A med egenverdi λ, så løser vektorfunksjonen $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. For

$$(\mathbf{v}e^{\lambda t})' = \mathbf{v}\lambda e^{\lambda t} = \lambda\mathbf{v}e^{\lambda t} = A(\mathbf{v}e^{\lambda t}).$$

Men om $n \times n$-matrisen A ikke har n lineært uavhengige egenvektorer, kan vi ikke spenne ut hele løsningsrommet til systemet kun med funksjoner på formen $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ med $\mathbf{v}$ egenvektor til A. Dette problemet kan løses ved å se på generaliserte egenvektorer til A. Hvis λ er en egenverdi for A med algebraisk multiplisitet r, så finner vi *generaliserte egenvektorer* for A i vektorrommet $\mathrm{Null}(A-\lambda)^r$. Nå kan man vise at det alltid finnes nok generaliserte egenvektorer for å danne en basis for løsningsrommet til systemet. Vi skal se hvordan dette fungerer for 2×2-matriser senere i kapitlet. Vi skal ikke diskutere detaljene for $n \geq 3$.

Initialverdiproblemer

Definisjon. Et *initialverdiproblem* er et system sammen med en initialbetingelse $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ hvor t_0 er et reelt tall og $\mathbf{y}_0$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$. △

Den fysiske tolkningen er at en partikkel som beveger seg i henhold til $\mathbf{y}(t)$ befinner seg i $\mathbf{y}_0$ når $t = t_0$.

Eksempel 13.10. Legg til kravet $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet – fra forrige eksempel – at den generelle løsningen er på formen

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Vi søker en løsning på initialverdiproblemet blant disse. Kombiner utregningen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3\cdot 0} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-1\cdot 0} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

med kravet $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ for å få matriseligningen

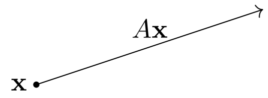
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denne bestemmer konstantene. Du er god på å løse slike ligninger på dette tidspunktet. Radreduser for å finne den entydige løsningen $c_1 = 1$ og $c_2 = 1$. Den unike løsningen på initialverdiproblemet er

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

△

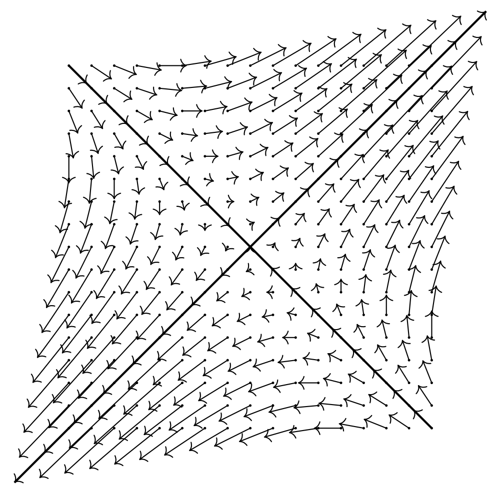
Før neste teorem skal vi tenke litt på en fysisk tolkning av initialverdiproblemer. Du oppfordres til å alltid ha $\mathbb{R}^2$ i bakhodet når du leser $\mathbb{R}^n$. Vi vet at en $n \times n$–matrise avbilder vektorer i $\mathbb{R}^n$ til vektorer i $\mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Denne informasjonen kan innebygges i $\mathbb{R}^n$ ved å tenke på A som et *vektorfelt* – noe du har lært om i Matematikk 2: Ethvert punkt $\mathbf{x}$ tilordnes pilen $A\mathbf{x}$ med startpunkt i $\mathbf{x}$.



Vi tenker på $A\mathbf{x}$ som en pil med $\mathbf{x}$ som startpunkt

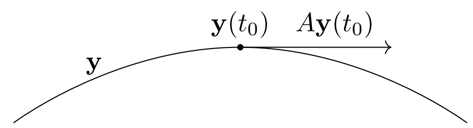
Eksempel 13.11. Her er en skisse av vektorfeltet assosiert til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



Aksene av fet type er linjene utspent av egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som svarer til egenverdiene 3 og -1. Legg merke til hvordan pilene beveger seg mot uendelig langs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som svarer til positiv egenverdi; mot origo langs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som svarer til negativ egenverdi. △

Hvordan hjelper vektorfelt oss med å forstå løsningene til systemer? En løsning $\mathbf{y}$ av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er en kurve som tilfredstiller at den deriverte i et tidspunkt t_0 er gitt som $\mathbf{y}'(t_0) = A\mathbf{y}(t_0)$. Den deriverte er – med andre ord – pilen i $\mathbf{y}(t_0)$ fra vektorfeltet assosiert med A.



Pilen $A\mathbf{y}(t_0)$ er den deriverte til $\mathbf{y}$ i $t = t_0$

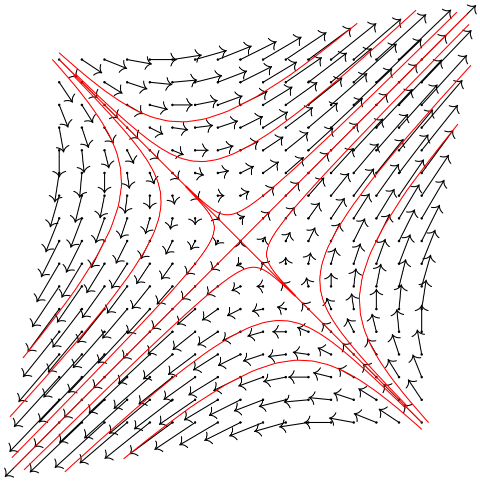
Derfor tangerer pilene løsningskurvene.

Et *fasediagram* til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er en skisse av alle mulige løsninger, inkludert *orientering* – hvilken retning vi beveger oss langs kurvene. Du kan lage en slik skisse ved å først skissére vektorfeltet fra A, for så å tegne kurver langs pilene.

Eksempel 13.12. Vi ser på favoritteksemplet vårt:

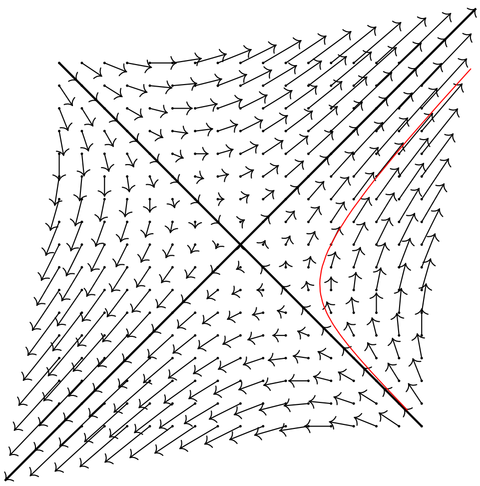
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tegn noen kurver som tangerer pilene i vektorfeltet til A for å få et fasediagram (rødt):



Løsningene kommer inn mot origo langs $\operatorname{Sp}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$, og beveger seg deretter bort fra origo langs $\operatorname{Sp}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$. Grunnen til dette er at leddet $c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}$ dominerer for negative t (negativ egenverdi), mens $c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3t}$ dominerer for positive t (positiv egenverdi). △

Eksempel 13.13. Når vi ser på en løsning som passerer et gitt punkt $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, så får vi en unik løsningskurve i vektorfeltet:



△

En løsning – som er en kurve i $\mathbb{R}^n$ – følger pilene i vektorfeltet. Eksempelet ovenfor illustrerer dette faktumet vi så klart fra ligningene. Rent fysisk kan vi tenke på en partikkel som starter i et punkt $\mathbf{y}_0$ når $t = t_0$ for så å bevege seg langs for eksempel et kraftfelt. Basert på dette virker det ikke urimelig at det alltid finnes en entydig løsning på et initialverdiproblem. Dette motiverer neste resultat.

Teorem 13.14 (Eksistens og entydighet)**.** *Et initialverdiproblem*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

har en entydig/unik løsning.

Når vi ser på et initialverdiproblem, så leter vi etter en løsning som passerer gitt punkt $\mathbf{y}(t_0)$ på tidspunkt t_0. Det betyr at vi får en unik kurve i fasediagrammet.

Todimensjonale system

Vi begrenser oss nå til todimensjonale system. Det betyr at A er en reell 2×2-matrise.

Det er tre forskjellige tilfeller vi må skille mellom avhengig av hva slags egenverdier A har. Husk at egenverdiene er røttene til det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I)$. Vi har tre muligheter:

1. to forskjellige relle røtter (A er reelt diagonaliserbar);
2. to komplekse røtter, men ingen reelle røtter;
3. én reell rot.

Vi skal nå diskutere de tre mulighetene:

Tilfelle 1: To forskjellige reelle røtter

I dette tilfellet er A en reelt diagonaliserbar 2×2-matrise. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to lineært uavhengige egenvektorer med tilhørende egenverdier λ_1 og λ_2. Da vet vi fra Teorem 13.8 at

$$c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}$$

er en generell løsning av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Fasediagram: reell diagonaliserbar

Vi kan klassifisere alle mulige fasediagrammer basert på egenverdier og egenvektorer. Faktoren $e^{\lambda t}$ forteller oss hvordan løsningene beveger seg langs spennet til $\mathbf{v}$ når t endres. Kunnskapene våre fra Matematikk 1 gjør oss i stand til å fylle ut:

λ	$e^{\lambda t}$	$\mathbf{v}e^{\lambda t}$
> 0	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0	minker	mot origo

Hva skjer når t øker?

Vær obs på at $\lambda < 0$ dominerer når $t \ll 0$; $\lambda > 0$ dominerer når $t \gg 0$. For et gitt system har vi to slike basiselementer. Her er en fremgangsmåte for å skissére fasediagrammet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ når A er reelt diagonaliserbar:

(a) Tegn to lineært uavhengige egenvektorer i et koordinatsystem.

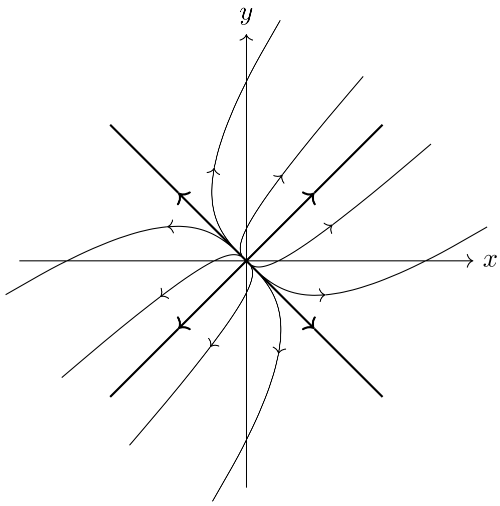
(b) Avgjør bevegelsen til løsningene langs utspennet til hver egenvektor.

(c) Tegn kurver som beveger seg i henhold til dette.

Eksempel 13.15. Systemet med

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

har to lineært uavhengige egenvektorer $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ med egenverdier henholdsvis 3 og 1. Fra diskusjonen ovenfor vet vi at løsningene beveger seg bort fra origo langs begge egenvektorene. Legg merke til at basiselementet $e^{3t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ dominerer for store t – løsninger mellom egenvektor–aksene vil derfor helle mot $\pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ når t blir stor. Fasediagram:



△

Tilfelle 2: To komplekse (ikke reelle) røtter

I dette tilfellet betrakter vi A som en kompleks matrise med reelle elementer. Matrisen er kompleks diagonaliserbar siden røttene til det karakteristiske polynomet kommer i konjugatpar: la $\lambda = \alpha + i\beta$ og $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ med $\beta \neq 0$ egenverdiene, og $\mathbf{v}$ og $\bar{\mathbf{v}}$ tilhørende egenvektorer. Som i tilfelle 1 kan vi vise at to lineært uavhengige *komplekse* løsninger til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er på formen

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} \text{ og } \overline{\mathbf{z}(t)} = \overline{\mathbf{v}e^{\lambda t}}.$$

Vi er interesserte i reelle løsningsfunksjoner. Faktisk kan vi enkelt finne minst to *reelle* løsninger som lineærkombinasjoner av de komplekse løsningene:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathbf{v}e^{\lambda t}) &= \frac{1}{2}[\mathbf{v}e^{\lambda t} + \overline{\mathbf{v}e^{\lambda t}}]\\ \operatorname{Im}(\mathbf{v}e^{\lambda t}) &= \frac{1}{2i}[\mathbf{v}e^{\lambda t} - \overline{\mathbf{v}e^{\lambda t}}].\end{aligned}$$

For å forstå real- og imaginærdelen husker vi Eulers formel fra starten av semesteret:

$$e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)).$$

Det gir oss:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}e^{\lambda t} &= (\operatorname{Re}(\mathbf{v}) + i\operatorname{Im}(\mathbf{v}))\cdot e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))\\ &= [\operatorname{Re}(\mathbf{v})\cos(\beta t) - \operatorname{Im}(\mathbf{v})\sin(\beta t)]e^{\alpha t}\\ &\quad + i[\operatorname{Re}(\mathbf{v})\sin(\beta t) + \operatorname{Im}(\mathbf{v})\cos(\beta t)]e^{\alpha t}.\end{aligned}$$

De to leddene gir oss to reelle løsninger til systemet. Vi oppsummerer diskusjonen i et teorem:

Teorem 13.16. *Anta at $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, er en kompleks egenverdi til A og la $\mathbf{v}$ være en tilhørende kompleks egenvektor. Så danner*

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\alpha t}(\operatorname{Re}(\mathbf{v})\cos(\beta t) - \operatorname{Im}(\mathbf{v})\sin(\beta t))$$

og

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t}(\operatorname{Re}(\mathbf{v})\sin(\beta t) + \operatorname{Im}(\mathbf{v})\cos(\beta t))$$

en basis for det reelle løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$

Eksempel 13.17. Vi finner løsningene til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene er $\pm i$. Du kan sjekke at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi i. Regn ut

$$\operatorname{Re}\mathbf{v} = \operatorname{Re}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} i \\ \operatorname{Re} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\operatorname{Im}\mathbf{v} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Im} i \\ \operatorname{Im} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teorem 13.16 gir basisvektorer

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}(\operatorname{Re}(\mathbf{v})\cos(\beta t) - \operatorname{Im}(\mathbf{v})\sin(\beta t))\\ =&e^{0\cdot t}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(1\cdot t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(1\cdot t))\\ =&\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}(\operatorname{Re}(\mathbf{v})\sin(\beta t) + \operatorname{Im}(\mathbf{v})\cos(\beta t))\\ =&e^{0\cdot t}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin(1\cdot t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(1\cdot t))\\ =&\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Generell løsning:

$$\begin{aligned}&c_1\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vi gjenkjenner matrisen som rotasjon mot klokken.

△

Eksempel 13.18. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De komplekse egenverdiene er $1 \pm i$. Du kan sjekke at $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor. Teorem 13.16 gir basisvektorer

$$e^t\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad e^t\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Den eneste forskjellen fra eksempel 13.17 er at vi har en faktor e^t. Den generelle løsningen er

$$e^t\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

△

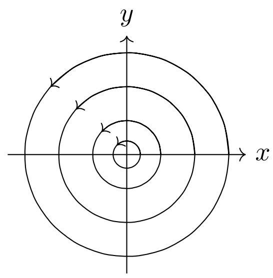
Fasediagram: kompleks diagonaliserbar
Faktorene med cosinus og sinus bidrar til en sirkulær bevegelse. Hvis også $\alpha \neq 0$ får vi i tillegg en innad- eller utadgående bevegelse avhengig av fortegnet til α – akkurat som i det reelle tilfellet. Kombinasjonen av disse bevegelsene er spiraler som enten beveger seg inn mot- eller bort fra origo. Vi oppsummerer:

α	bevegelse
> 0	utadgående spiraler
$= 0$	sirkulær
< 0	innadgående spiraler

Eksempel 13.19. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

være som i Eksempel (13.17). Fasediagrammet består av sirkler sentrert i origo orientert mot klokken.

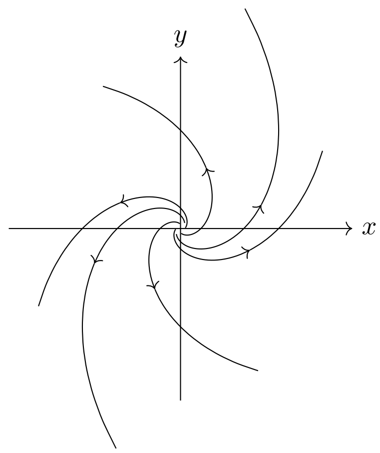


△

Eksempel 13.20. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

som i Eksempel (13.18). Faktoren e^t bidrar til en utadgående bevegelse, mens matrisen bidrar til en sirkulær bevegelse mot klokken. Derfor består fasediagrammet av utadgående spiraler orientert mot klokken.



Vi fant ut av at bevegelsen skjer mot klokken fordi vi kjente igjen rotasjonsmatrisen. En mer metodisk fremgangsmåte hadde vært å plotte vektorfeltet fra A i et punkt, eller to. Det er ofte lurt å velge $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ siden disse er enkle å plotte. Eksempelvis har vi

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så vektorfeltet peker skrått opp i første kvadrant fra punktet $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dermed må spiralene – som tangerer pilene fra vektorfeltet – gå mot klokken. △

Tilfelle 3: Én reell rot

Vi skal bare diskutere hovedeksemplet som er en 2×2-matrise A på formen

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Da er λ egenverdien til A. Alle andre 2×2-matriser med bare én reell egenverdi (med algebraisk multiplisitet 2) kan transformeres til en slik matrise på en måte som ligner på det vi gjør for en diagonaliserbar matrise. Stikkordet er at A er på Jordan-normalform. Dette skal vi ikke diskture videre i dette faget.

Egenvektorene for A er alle på form $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A til egenverdi λ. Men vi kan ikke finne en annen egenvektor for A som er lineært uavhengig av $\mathbf{v}$.

Vi vet fra en tidligere diskusjon at vektorfunksjonen $\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}_1 e^{\lambda t}$ er en løsning til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Spørsmålet er om vi kan finne en annen løsning som ikke er en lineærkombinasjon av $\mathbf{e}_1 e^{\lambda t}$.

For å finne en løsning til ser vi på systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= \lambda y_2(t). \end{aligned}$$

Da vet vi fra den andre ligningen at vi må ha $y_2(t) = ce^{\lambda t}$. Vi setter inn i den første ligningen og får

$$y_1'(t) = \lambda y_1(t) + ce^{\lambda t}. \tag{13.1}$$

Nå husker vi produktregelen for derivasjon eller delvis integrasjon og ser at

$$y_1(t) = cte^{\lambda t}$$

løser differensialligning (13.1).

Vi konkluderer at den generelle løsningen til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eksempel 13.21. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har altså $\lambda = -1$. Vi ser på intialverdiproblemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ med $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sett inn $t = 0$ for å få $c_1 = -1$ og $c_2 = 1$. △

Vi ser også på et eksempel som illustrerer den generelle løsningsmetoden i dette tilfellet. Det forventes ikke at du kan løse det selv.

Eksempel 13.22. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Den karakteriske ligningen er $(\lambda+1)^2 = 0$ og A har derfor egenverdi $\lambda = -1$ med algebraisk multiplisitet 2. Egenrommet er utspent av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi kan ikke finne en egenvektor som er lineært uavhengig av $\mathbf{v}$. Men vi kan finne en *generalisert egenvektor* $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ som oppfyller

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

Matrisen $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ med kolonner $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er inverterbar med invers $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Da har vi

$$A = PJP^{-1}$$

der J er matrisen $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ som i det forrige eksemplet.

Den generelle løsningen til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

△

Eksempel (13.22) gir oss faktisk en generell oppskrift.

Teorem 13.23. *La A være en reell 2×2-matrise med reell egenverdi λ med algebraisk multiplisitet 2. La $\mathbf{v}$ være en egenvektor til λ, og la $\mathbf{w}$ være en vektor som oppfyller $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Da er løsningene til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ på formen*

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Inhomogene system

Før vi starter med såkalte inhomogene system skal vi se på hva *homogen* og *inhomogen* betyr for lineære ligninger i $\mathbb{R}^n$. En matriseligning

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kalles gjerne for en *homogen* ligning. Løsningene til ligningen er et vektorrom, nemlig nullrommet til A, eller *kjernen til lineærtransformasjonen* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Eksempelvis er nullrommet til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

det lineære spennet til $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Hvis vi legger til en ikke-null vektor $\mathbf{b}$ på høyre side,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kalles heller ligningen inhomogen. Løsningene utgjør ikke et vektorrom. Eksempelvis løser $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Men summen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

løser ikke ikke ligningen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Differansen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

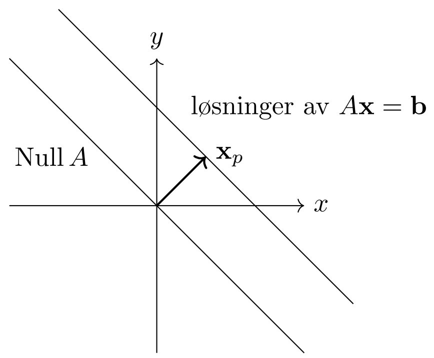
derimot løser den homogene ligningen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette holder generelt. Observasjonen er at alle løsninger på $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er på formen

$$\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$$

hvor $\mathbf{x}_h$ er en vilkårlig vektor i nullrommet til A og $\mathbf{x}_p$ er en spesifikk løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Geometrien er illustrert som følger.



Merk at

$$T(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}'(t) - A\mathbf{y}(t)$$

er en lineærtransformasjon ettersom derivasjon og matrisemultiplikasjon er lineære operasjoner. *Kjernen til denne lineærtransformasjonen* er nøyaktig løsningene av systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Derfor blir det korrekt å kalle denne ligningen *homogen.* Den *inhomogene* ligningen svarer til å legge til en vektor $\mathbf{b} = \mathbf{f}(t)$ på høyre side:

$$T(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}(t)$$

Eller ekvivalent:

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

En spesifikk løsning av $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$ kalles en

	$\mathbb{R}^n$	vektorfunksjoner
homogen	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$
inhomogen	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$

Ligninger som oppfører seg likt

partikulær løsning. En beskrivelse av alle løsninger kalles fortsatt en *generell løsning.* Analogien til $\mathbb{R}^n$ lar oss formulere et teorem.

Teorem 13.24. *Hvis* $\mathbf{y}_p(t)$ *er en partikulær løsning av*

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t),$$

så er en generell løsning gitt av

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t),$$

hvor $\mathbf{y}_h(t)$ *er en generell løsning av den tilhørende homogene ligningen.*

Merk. Det forventes ikke at du kan finne partikulære løsninger av vilkårlige system. Du vil alltid få dem servert.

Eksempel 13.25. La oss se på det inhomogene systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 4te^t \end{bmatrix}.$$

En differensialligningsekspert har gitt oss

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix},$$

men vi sjekker at det er en løsning for sikkerhets skyld:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_p' &= \begin{bmatrix} -2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix}' \\
&= \begin{bmatrix} -2e^t - 2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2e^t - 2te^t + (2e^t - 2e^t) \\ -2e^t + (4te^t - 4te^t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_p(t) + 2y_p(t) + 2e^t \\ 2x_p(t) + y_p(t) + 4te^t \end{bmatrix} \\
&= A\mathbf{y}_p + \mathbf{f}(t)
\end{aligned}$$

Vi har allerede funnet den generelle homogene løsningen. Teorem 13.24 sier at en generell løsning er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix}.$$

$\triangle$