Kapittel 6

Determinanter

Den viktigste egenskapen ved en kvadratisk matrise, er hvorvidt den er inverterbar eller ikke. Husk at hvis matrisen A er inverterbar, så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en unik løsning. Vi skal se at *determinanten*, til matrisen, som vi så vidt nevnte i kapittel 3, bestemmer (...determinerer...) dette. Vi skal også se at determinanten har en geometrisk betydning i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Vi har to forskjellige notasjoner for determinanter. Hvis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

er en $n \times n$-matrise, så skriver vi enten

$$\det A \qquad \text{eller} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

for determinanten til A.

Determinanter for 2×2-matriser

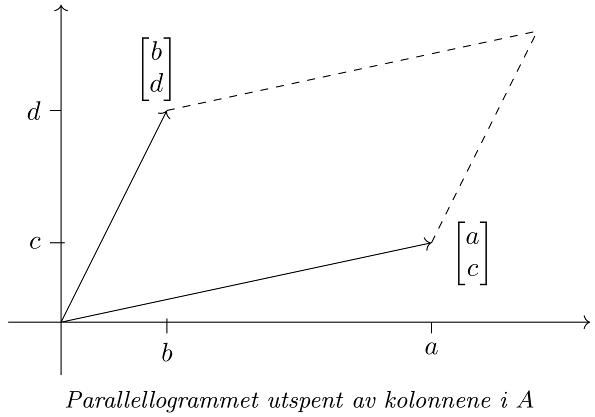
For en 2×2-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er determinanten definert ved:

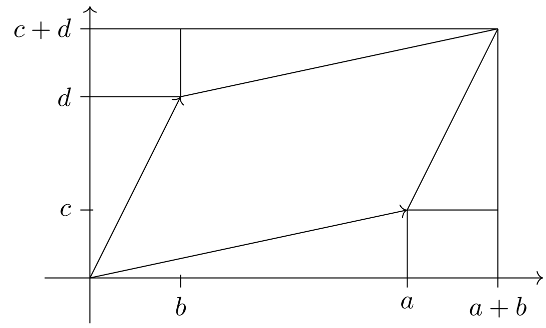
$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten har en fin geometrisk tolkning. Vi ser på de to kolonnene i A som vektorer i $\mathbb{R}^2$, tegner dem som piler i planet, og lager et parallellogram med disse som to av sidene. Dette parallellogrammet kan vi kalle parallellogrammet utspent av de to vektorene.



Parallellogrammet utspent av kolonnene i A

La oss beregne arealet av dette parallellogrammet. Vi tegner på noen hjelpelinjer:



Parallellogramarealberegningshjelpefigur

Vi kan finne arealet av parallellogrammet ved å starte med arealet av det store rektangelet, som er

$$(a + b)(c + d),$$

og trekke fra arealene av de to små rektanglene og de fire trekantene som omgir parallellogrammet. Vi ser at hvert av de små rektanglene har areal bc, at de to trekantene øverst og nederst til sammen har areal ac, og at trekantene til venstre og høyre til sammen har areal bd. Det betyr at arealet av parallellogrammet er:

$$\begin{aligned} &(a + b)(c + d) - 2bc - ac - bd \\ &\quad = ac + ad + bc + bd - 2bc - ac - bd \\ &\quad = ad - bc \\ &\quad = \det A \end{aligned}$$

Vi kommer altså frem til at arealet av parallellogrammet utspent av kolonnene i A er lik determinanten til A. Denne utregningen var imidlertid litt avhengig av hvordan disse to kolonnevektorene er plassert i forhold til hverandre i planet. Hvis vi hadde byttet plass på kolonnene, så ville vi isteden fått $bc - ad$ som areal. Da ville altså determinanten vært negativ.

Det som holder i alle tilfeller, er at arealet av parallellogrammet utspent av kolonnene i A er lik absoluttverdien til determinanten:

$$|\det A|$$

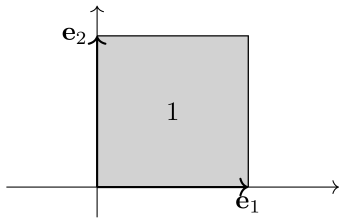
Så determinanten gir oss arealet til et parallellogram. Men hva forteller det oss om matrisen A?

Vi kan tenke på A som en transformasjon av planet der hver vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ sendes til vektoren $A\mathbf{v}$. Husk at vi gjerne kan (og vi vil) tenke på vektorer i $\mathbb{R}^2$ som punkter i planet. Determinanten sier noe om hvordan planet endres under denne transformasjonen.

La

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

være de to enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$, og se på kvadratet utspent av disse:



Enhetskvadratet

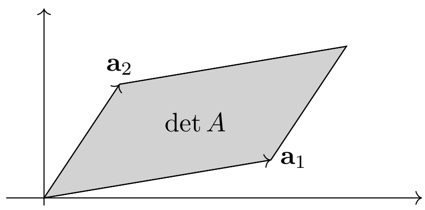
Nå vil vi se på hva som skjer med dette kvadratet dersom vi sender hvert punkt $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ til $A\mathbf{v}$, der

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$

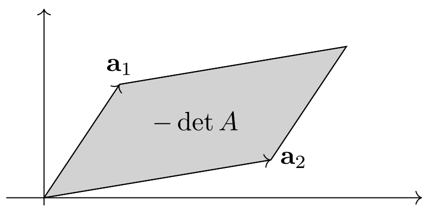
er en 2×2-matrise med $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Da sendes vektoren $\mathbf{e}_1$ til $\mathbf{a}_1$, og vektoren $\mathbf{e}_2$ sendes til $\mathbf{a}_2$. Alle vektorene som ligger inni enhetskvadratet i forrige figur sendes til vektorer som ligger inni parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

Vi skisserer noen forskjellige muligheter, for forskjellige valg av matrisen A:

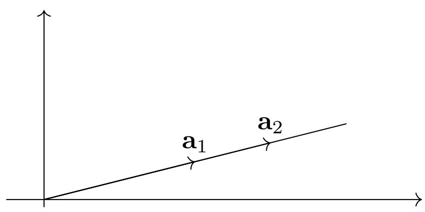
$\det A > 0$



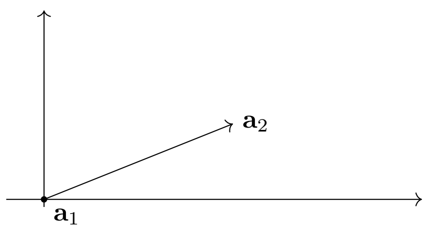
$\det A < 0$



$\det A = 0$



$\det A = 0$



I den første figuren har vi en matrise med positiv determinant. Da gjør transformasjonen $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ at enhetskvadratet skaleres til et parallellogram med areal $\det A$. Hvis $\det A > 1$ betyr dette at planet «blåses opp»; hvis $0 < \det A < 1$ betyr det at planet «krympes sammen».

I den andre figuren har vi en matrise med negativ determinant. Da er situasjonen helt lik som i den første figuren, bortsett fra at det er $(-\det A)$ som er arealet. Da får vi at med $\det A < -1$ blir planet «blåst opp», og med $-1 < \det A < 0$ blir det «krympet sammen».

I den tredje og den fjerde figuren har vi situasjoner der determinanten er 0. Det vil si at parallellogrammet utspent av kolonnene i A har areal 0. Det blir altså ikke et virkelig parallellogram i disse tilfellene; det har kollapset til et «degenerert» parallellogram som er bare en linje. På samme måte vil transformasjonen $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ i disse tilfellene kollapse hele planet ned til linjen utspent av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

Eksempel 6.1. Vi kan også beregne determinanten til en kompleks matrise:

$$\det \begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} = (1-i)(1+2i) - 3i$$
$$= 3 - 2i$$

Men tallet vi får ut har ingen enkel geometrisk tolkning. △

Determinanter for 3×3-matriser

For en 3×3-matrise

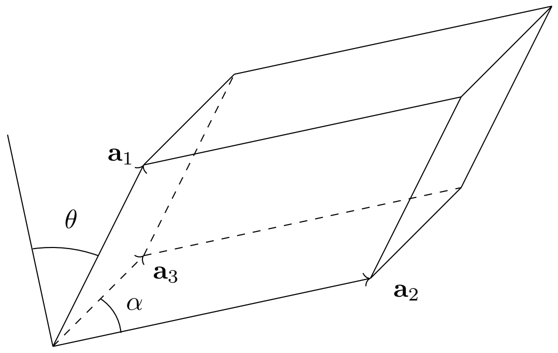
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

kan vi tegne opp radene i A som piler i $\mathbb{R}^3$, og lage et parallellepiped med disse pilene som tre av sidene. Dette kaller vi for parallellepipedet utspent av vektorene. Determinanten er:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| \|\mathbf{a}_3\| \sin\alpha \cos\theta$$

Her er α er vinkelen mellom $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$, og θ er vinkelen mellom $\mathbf{a}_1$ og normalen til planet utspent av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Volumet av parallellepipedet utspent av kolonnene i A er lik absoluttverdien av determinanten til A.

For to kapitler siden sa vi at det var søylene i A som utspente et parallellepiped. Det er ikke det samme parallellepipedet som radene spenner ut, men det har samme volum, og samme determinant. Om man baserer seg på rader eller søyler, er altså av ingen betydning.



Parallellepipedvolumberegningshjelpefigur

Determinanter: generell definisjon

Vi definerer determinanten til en vilkårlig stor kvadratisk matrise etter samme mønster som determinanten til en 3×3-matrise.

Definisjon. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

være en $n \times n$-matrise. *Determinanten* til A, som har notasjonen $\det A$, defineres på følgende måte.

1. Hvis $n = 1$, så har vi at $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, og da definerer vi at $\det A = a_{11}$.

2. Hvis $n > 1$, innfører vi først noen hjelpevariabler. For hver i og j fra 1 til n setter vi A_{ij} til å være $(n-1) \times (n-1)$-matrisen vi får ved å fjerne rad i og kolonne j fra A, og vi setter

   $$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

   til å være determinanten til denne matrisen, med et fortegn som avhenger av i og j. Determinanten til A defineres ved:

   $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} \qquad \triangle$$

Tallene C_{ij} i definisjonen kalles *kofaktorer* av A.

Det er ikke vanskelig å se at hvis vi setter inn en 2×2-matrise eller en 3×3-matrise i denne generelle definisjonen, så får vi bare de vanlige reglene for determinanter av 2×2- og 3×3-matriser.

For å få litt erfaring med å bruke definisjonen på større matriser regner vi ut determinanten av en 4×4-matrise.

Eksempel 6.2. La A være følgende 4×4-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi regner ut determinanten til A. Fra definisjonen får vi:

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Vi regner ut hver av 3×3-determinantene som trengs (merk at vi ikke trenger å regne ut den andre, for den skal uansett ganges med 0):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Ved å sette inn disse i uttrykket for $\det A$ får vi:

$$\det A = 3 \cdot 6 - 0 + 2 \cdot (-12) - 4 \cdot (-6) = 18$$

Vi har altså regnet ut at $\det A = 18$. $\triangle$

Ved hjelp av definisjonen kan vi regne ut determinanten til en hvilken som helst kvadratisk matrise, men det kan bli veldig mye jobb. I eksempelet så vi at determinanten til en 4×4-matrise er definert ut fra determinantene til fire 3×3-matriser, og hver av disse er igjen definert ut fra determinantene til tre 2×2-matriser. Hvis vi går til større matriser, blir arbeidsmengden fort enormt stor.

I løpet av dette kapitlet skal vi se på noen lure teknikker for å regne ut determinanter på mindre arbeidskrevende måter.

Kofaktorekspansjon

I definisjonen av determinanten går vi gjennom første rad i matrisen, og ser på tallene

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}.$$

Hvert tall a_{1j} ganges med den tilhørende kofaktoren C_{1j}, og til slutt summerer vi alle disse produktene.

Det er imidlertid ikke nødvendig å gå langs første rad når vi gjør dette. Det fungerer like bra å gå langs en annen rad og følge det samme systemet, og resultatet blir det samme. Det går dessuten an å gå langs en hvilken som helst kolonne med samme system. Vi oppsummerer dette i følgende teorem.

Teorem 6.3. *La A være en $n \times n$-matrise, der $n > 1$, og la A_{ij} og C_{ij} være som i definisjonen av determinant. Da har vi*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{il} C_{il}$$

for alle k og l slik at $1 \leq k \leq n$ og $1 \leq l \leq n$.

Å regne ut determinanten ved å beregne en sum av tall fra matrisen ganget med kofaktorer slik som i teoremet kalles *kofaktorekspansjon*. Vi sier at vi gjør kofaktorekspansjon langs rad k eller langs kolonne l.

La oss nå regne ut den samme determinanten som i eksempel 6.2, men på en lurere måte.

Vi må passe på at vi får fortegnene i kofaktorene riktig. Når vi gjør kofaktorekspansjon langs første rad (slik som i definisjonen), eller langs første kolonne, starter vi alltid med positivt fortegn i det første leddet. Men når vi ekspanderer langs en annen rad eller kolonne, kan det hende vi må starte med negativt fortegn. Det kan være nyttig å bruke følgende diagram som en huskeregel for hvilket fortegn vi skal ha i de forskjellige kofaktorene:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Eksempel 6.4. Vi lar igjen A være denne 4×4-matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi kan observere at den andre kolonnen inneholder nesten bare nuller, så det er lurt å gjøre kofaktorekspansjon langs den. Da får vi:

$$\begin{aligned} \det A &= -0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \cdot (4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)) = 18 \end{aligned}$$

Vi fikk samme resultat som i eksempel 6.2, men med mindre arbeid, siden vi bare trengte å regne ut én 3×3-determinant. △

Determinanter og radoperasjoner

Hvis vi utfører en radoperasjon på en matrise, så får vi en ny matrise. Den matrisen har ikke nødvendigvis samme determinant som den opprinnelige, men det viser seg at determinanten endrer seg på ganske kontrollerte måter når vi utfører radoperasjoner. Dette kan vi utnytte for å spare oss for en del arbeid når vi skal regne ut determinanter, spesielt hvis vi har store matriser.

Teorem 6.5. *La A være en $n \times n$-matrise, og la B være en matrise vi får ved å utføre en radoperasjon på A. Da har vi følgende sammenheng mellom determinantene til A og B, basert på hvilken type radoperasjon vi utførte:*

Radoperasjon	*Resultat*
Gange en rad med et tall k	$\det B = k \cdot \det A$
Legge til et multiplum av én rad i en annen	$\det B = \det A$
Bytte om to rader	$\det B = -\det A$

La oss bruke dette teoremet til å beregne en determinant.

Eksempel 6.6. Vi regner ut $\det A$, der

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 19 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 5 = 30 \end{aligned}$$

Her startet vi med å gjøre radoperasjoner på matrisen, samtidig som vi holdt styr på hvordan determinanten endret seg.

Først ganget vi øverste rad med $1/3$. Det medførte at determinanten til den nye matrisen ble $1/3$ ganger determinanten til A, så vi måtte gange den med 3 for at tallene skal bli like. En hendig måte å huske hvordan dette fungerer er å tenke på det som å sette et tall utenfor parentes. På samme måte som vi kan trekke ut et 3-tall fra en parentes og få

$$(3 + 3 + 12) = 3 \cdot (1 + 1 + 4),$$

kan vi trekke ut et 3-tall fra en rad i en determinant.

Etterpå trakk vi fra multipler av første rad i de to andre radene, men det medførte ingen endring av determinanten.

Så byttet vi de to nederste radene, og det gjorde at determinanten skifter fortegn.

Til slutt gjorde vi kofaktorekspansjon langs den første kolonnen. Siden vi ved å utføre radoperasjoner hadde sørget for å få bare nuller under diagonalen, ble kofaktorekspansjonen enkel og grei. △

Triangulære matriser

Vi sier at en $n \times n$-matrise er *øvre triangulær* hvis alle tall under diagonalen er 0, altså hvis den er på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tilsvarende sier vi at en $n \times n$-matrise er *nedre triangulær* hvis alle tall over diagonalen er 0, altså hvis den er på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eksempel 6.7. I eksempel 6.6 brukte vi radoperasjoner til å skrive om matrisen vår til følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er øvre triangulær. △

Hvis vi skal finne determinanten til en øvre triangulær matrise er det praktisk å kofaktorekspandere langs første kolonne. Da får vi bare ett ledd i ekspansjonen, nemlig tallet øverst til venstre i matrisen ganget med determinanten til matrisen der første rad og kolonne er fjernet. Denne matrisen er igjen øvre triangulær. Så fortsetter vi med kofaktorekspansjon langs første kolonne i hvert steg nedover. Det vi ender opp med til slutt er å bare gange sammen alle tallene på diagonalen.

Vi oppsummerer dette i et teorem.

Teorem 6.8. *La A være en (øvre eller nedre) triangulær $n \times n$-matrise. Da er determinanten til A lik produktet av tallene på diagonalen i A:*

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

Eksempel 6.9. Ved å bruke teoremet kan vi skrive opp determinanten til en triangulær matrise direkte, uten å måtte beregne andre determinanter først:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5$$

△

Hvis vi skal beregne determinanten til en stor og stygg matrise, er det en god strategi å bruke radoperasjoner for å skrive om matrisen til øvre triangulær form (og holde orden på hvordan determinanten endrer seg ved hjelp av teorem 6.5), og så regne ut determinanten til den triangulære matrisen ved hjelp av teorem 6.8.

Flere regneregler for determinanter

Vi tar med et par regneregler til for determinanter.

Teorem 6.10. *Determinanten til et produkt av to matriser er produktet av determinantene. Altså: Hvis A og B er to $n \times n$-matriser, så er*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Teorem 6.11. *Determinanten endrer seg ikke når vi transponerer matrisen. Altså: Hvis A er en $n \times n$-matrise, så er*

$$\det A = \det A^\top.$$

Karakterisering av inverterbarhet

Vi kan bruke determinanten til å sjekke om en matrise er inverterbar eller ikke. Dette kan dessuten knyttes sammen med hvorvidt kolonnene i matrisen vår er lineært uavhengige, og hva det utspenner.

Følgende teorem gir en presis sammenheng mellom inverterbarhet, determinant, lineær uavhengighet og mengden utspent av kolonnene.

Teorem 6.12. *La A være en $n \times n$-matrise. Følgende påstander er ekvivalente:*

1. *A er inverterbar.*
2. $\det A \neq 0$.
3. *Kolonnene i A er lineært uavhengige.*
4. *Kolonnene i A utspenner $\mathbb{C}^n$.*

Bevis. Vi beviste i forrige kapittel at kolonnene i A er lineært uavhengige hvis og bare hvis kolonnene spenner ut $\mathbb{C}^n$.

Vi beviser nå ekvivalensen av disse to med at A er inverterbar. I følge teorem 5.7 er kolonnnene i A lineært uavhengige hvis og bare hvis vi får et pivotelement i hver kolonne når vi gausseliminerer. En annen måte å si dette på, er at

$$A \sim I_n,$$

og dette er ekvivalent med at A er inverterbar, ifølge teorem 4. 25.

For å vise at $\det A \neq 0$ er ekvivalent med at A har lineært uavhengige kolonner, kan vi bruke teorem 6.8. Vi gausseliminerer A til å blir triangulær. Dersom kolonnene i A er lineært uavhengige, får vi et pivotelement i hver kolonne. Siden vi aldri ganger en rad med 0 under gausseliminering, viser 6.8 at $\det A \neq 0$. Dette resonnementet fungerer også baklengs: dersom $\det A \neq 0$, har den gausseliminerte triangulære matrisen ingen diagonalelementer lik null, og det betyr at den originale matrisen hadde lineært uavhengige kolonner. □