Oppgave 1 Finn alle løsningene til det lineære ligningssystemet

$$\begin{cases} x - y - 3z = 2 \\ -x + 2y + 5z = -1 \\ 3x + 3y + 3z = 12 \end{cases}$$

Oppgave 2 • Løs $z^4 = (1-\mathrm{i})^{12}$ for $z \in \mathbb{C}$ og • skissér roten/røttene i det komplekse planet.

Oppgave 3 Finn den generelle løsningen til

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t^2 + 1.$$

Oppgave 4 • Regn ut en basis for både Null A og Col A når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

og • bestem dimensjonen til Null$(A^\top)$, hvor $A^\top$ er den transponerte matrisen av A.

Oppgave 5 • Finn egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

når det er kjent at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer.

• Løs deretter initialverdiproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = -1.$$

Oppgave 6 La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon hvor

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

Bestem $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

Oppgave 7 La $V \subseteq \mathbb{R}^3$ utgjøre det lineære spennet $\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$.

- Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ ned på V.
- Finn minste kvadraters-løsningen til

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

Oppgave 8 Finn matrisen A som tilfredsstiller ligningen

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Oppgave 9 La

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \left\{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; p(x) = ax^2 + bx + c \text{ for koeffisienter } a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

være vektorrommet av reelle polynomer av grad høyst 2.

- Vis at $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definert ved

$$T(p) = \begin{bmatrix}p(0)\\ p'(1)\\ p''(2)\end{bmatrix} \qquad \left(p'(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x), \quad p''(x) = \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}(x)\right)$$

er en lineærtransformasjon og • bestem $\ker T$.

Oppgave 10 La A være en kolonnevektor (dvs. en $n \times 1$-matrise) og la B være en matrise slik at produktet AB utgjør en veldefinert kvadratisk matrise.

- Bestem antall rader og kolonner i B og AB.
- Finn rangen til AB når vi antar at AB ikke er null-matrisen.