Oppgave 1 La $p(z) = z^3 + 27$. Finn alle røttene til $p(z)$, skriv røttene på standardform og skissér røttene i det komplekse planet.

Løsning:

Vi skal løse ligningen $p(z) = z^3 + 27 = 0$, eller ekvivalent $z^3 = -27$. Vi skriver -27 som $27e^{i\pi}$, og får

$$z^3 = 27e^{i\pi} = 27e^{i\pi + 2\pi i \cdot k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

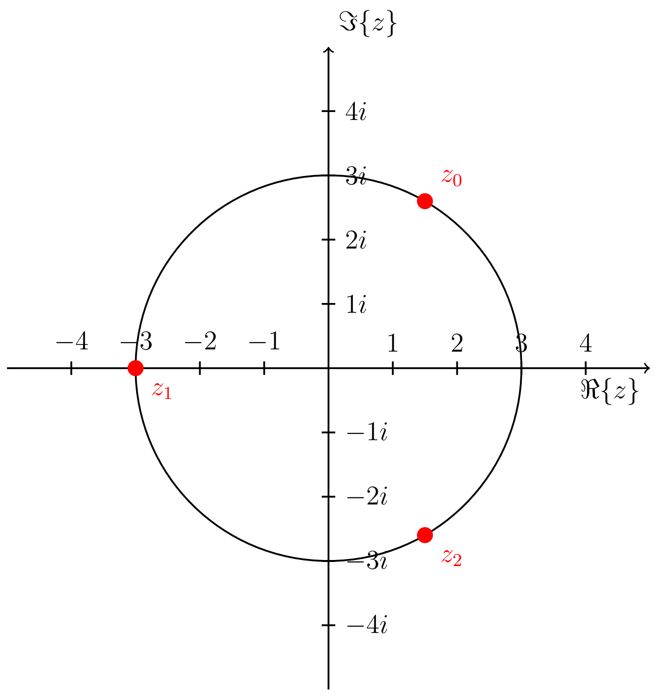
Dermed er

$$z = \left(27e^{i\pi+2\pi i\cdot k}\right)^{1/3} = 3e^{\frac{1}{3}\pi i + \frac{2\pi}{3} i \cdot k}.$$

Vi setter inn for $k = 0, 1, 2$ og får følgende løsninger (på polarform og standardform)

$$\begin{aligned}
z_0 &= 3e^{\frac{\pi}{3}i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\
z_1 &= 3e^{i\pi} = -3 \\
z_2 &= 3e^{\frac{5\pi}{3}i} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Til slutt skisserer vi de tre løsningene i det komplekse plan:



Oppgave 2 Se på punktene $(1,5), (-1,9)$ og $(2,12)$ i $\mathbb{R}^2$.

a) Finn et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom punktene.
Løsning:
Fra de tre punktene får vi ligningene

$$\begin{aligned} p(1) &= a + b + c = 5 \\ p(-1) &= a - b + c = 9 \\ p(2) &= 4a + 2b + c = 12 \end{aligned}$$

Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Altså er $a = 3, b = -2$ og $c = 4$, og andregradspolynomet som går gjennom de tre punktene er $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

b) Bruk minste kvadraters metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til de tre punktene.
Løsning:
Punktene gir oss ligningene

$$\begin{aligned} q(1) &= d + e = 5 \\ q(-1) &= -d + e = 9 \\ q(2) &= 2d + e = 12 \end{aligned}$$

Dette tilsvarer ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Vi finner $A^T A$ og $A^T \mathbf{b}$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 26 \end{bmatrix},$$

før vi radreduserer totalmatrisen til normalligningene $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 20 \\ 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/7 \\ 0 & 1 & 58/7 \end{array}\right]$$

Altså er $d = \dfrac{4}{7}$ og $e = \dfrac{58}{7}$, og $q(x) = \dfrac{4}{7}x + \dfrac{58}{7}$ er førstegradspolynomet som passer best til punktene.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & a^2-2 \end{bmatrix}, \qquad \text{hvor } a \in \mathbb{R}.$$

a) For hvilke reelle tall a er matrisa A inverterbar?
Løsning:
Vi regner ut determinanten til A:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & a^2-2 \end{bmatrix}\right) + 4 \cdot \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) \\ &= a^2 - 2 - 10 + 4(4-2) = a^2 - 4 = (a-2)(a+2) \end{aligned}$$

Vi ser at $\det(A) = 0$ for $a = \pm 2$ og da er matrisa ikke inverterbar. Altså er A inverterbar for alle $a \neq \pm 2$.

b) For hvilke reelle tall a har ligningen

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a-4 \end{bmatrix}$$

- ingen løsning?
- nøyaktig én løsning?
- uendelig mange løsninger?

Løsning:
Vi starter med å radredusere totalmatrisa til ligningen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & a^2-2 & a-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

Fra a) vet vi at ligningen har nøyaktig én løsning så lenge $a \neq \pm 2$, siden matrisa A da er inverterbar. For $a = 2$ får vi en nullrad, og systemet har uendelig mange løsninger. For $a = -2$ gir siste rad at $0 = -4$, og vi har dermed ingen løsning.

Oppgave 4

La $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ være vektorrommet bestående av reelle 2×2-matriser.
Vi ser på følgende delmengde av $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

U består altså av alle reelle 2×2-matriser A, som er slik at $A^T = -A$.

a) Vis at U er et underrom av $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Løsning:
Vi må sjekke at nullmatrisa er med i U, og at U er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon.

i) Nullmatrisa er med i U, fordi $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

ii) La $A, B \in U$. Da er $A^T = -A$ og $B^T = -B$.
Videre er $(A+B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A+B)$, så $(A+B) \in U$, og U er dermed lukket under addisjon. ✓

iii) La $A \in U$. Da har vi for en skalar $k \in \mathbb{R}$ at $(kA)^T = kA^T = k(-A) = -(kA)$, så $kA \in U$, og U er dermed lukket under skalarmultiplikasjon. ✓

b) Finn en basis for U og angi dimensjonen til U.
Løsning:
La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Da vil

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = -A.$$

Dette gir at

$$a = -a, \quad c = -b \quad \text{og} \quad d = -d.$$

For at $a = -a$ og $d = -d$ skal være oppfylt, må $a = d = 0$.
Alle matriser i U må med andre ord være på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed vil

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

utgjøre en basis for U, og dimensjonen til U er 1.

Oppgave 5 En lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen A som hører til transformasjonen T, og avgjør om T er injektiv og/eller surjektiv.

Løsning:

Vi ønsker å finne A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og har fått oppgitt at

$$AX = A\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\2 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\1 & 4 & 0\\3 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Vi finner inversmatrisen til X:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\end{array}\right].$$

Så bruker vi X^{-1} til å finne A:

$$A = \begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\1 & 4 & 0\\3 & 2 & 2\end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\1 & 4 & 0\\3 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1\\\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\-1 & -1 & 3\\\frac{1}{2} & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Vi finner så determinanten til A:

$$\det(A) = 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\right) = 2\left(-2 + \frac{1}{2}\right) = -3 \neq 0.$$

Siden $\det(A) \neq 0$ er A inverterbar og lineærtransformasjonen er både injektiv og surjektiv.

Oppgave 6

a) Vis at

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 9x_3y_3$$

er et indreprodukt på $\mathbb{R}^3$.

Løsning:

Vi må vise positivitet, symmetri og linearitet.
Vi starter med positivitet:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$$

Siden vi har positive skalarer og vektorelementene opphøyes i andre vil $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, og vi får likhet kun dersom alle elementene i $\mathbf{x}$ er lik null. ✓
Så ser vi på symmetri:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 9x_3y_3 = y_1x_1 + 4y_2x_2 + 9y_3x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle. \quad \checkmark$$

Til sist ser vi på linearitet:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z} \rangle &= x_1(ay_1 + bz_1) + 4x_2(ay_2 + bz_2) + 9x_3(ay_3 + bz_3) \\ &= ax_1y_1 + 4ax_2y_2 + 9ax_3y_3 + bx_1z_1 + 4bx_2z_2 + 9bx_3z_3 \\ &= a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Finn en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^3$ utspent av vektorene

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

med hensyn til indreproduktet i a).
Løsning:
Vi har altså

$$V = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

Vi ønsker å finne en ortogonal basis for V, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ mht. indreproduktet i a).
La først $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Så finner vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \frac{19}{17}\mathbf{u}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{19}{17}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Så en ortogonal basis for V med hensyn til det gitte indreproduktet er altså

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Oppgave 7

La

$$A = \begin{bmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R} \text{ og } a \neq b.$$

a) Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$ og bestem et uttrykk for A^k, der k er et vilkårlig positivt heltall.

Løsning:

Vi finner egenverdier og tilhørende egenvektorer og setter egenverdiene på diagonalen til D og lar kolonnene til P være tilhørende egenvektorer.

Matrisa A er øvre triangulær, så vi finner egenverdiene langs diagonalen. Egenverdiene er med andre ord $\lambda_1 = a$ og $\lambda_2 = b$.

Vi finner egenvektorer tilhørende $\lambda_1 = a$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & b-a \\ 0 & b-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En tilhørende egenvektor er dermed $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

For $\lambda_2 = b$ får vi

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{b-a}{a-b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og en tilhørende egenvektor er $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Så med

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

har vi at $A = PDP^{-1}$.

Videre er

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

og vi får

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^k & b^k - a^k \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$$

b) Finn den generelle løsningen av følgende system av differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

og finn så løsningen av systemet som tilfredsstiller $y_1(0) = 2$ og $y_2(0) = -4$.
Løsning:
Matrisen i oppgaven er på samme form som matrisen i oppgave a), med $a = -2$ og $b = 3$. Egenverdiene er altså $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 3$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det betyr at generell løsning av systemet er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Initialbetingelsene gir $y_2(0) = c_2 = -4$ og $y_1(0) = c_1 + c_2 = 2$, som igjen gir $c_1 = 6$.

Oppgave 8 Finn generell løsning av $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}$ og løs for initialbetingelser $y(0) = y'(0) = 1$.
Løsning:
Vi løser først den homogene ligningen $y'' + 5y' + 6y = 0$. Det karakteristiske polynomet er $r^2 + 5r + 6$, som har røtter $r_1 = -2$ og $r_2 = -3$. Dermed er $y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$ hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Høyresiden av ligningen er en del av løsningen til den homogene ligningen så vi gjetter partikulærløsning på formen $y_p = Ate^{-2t}$, og setter inn i ligningen:

$$-4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t} + 5Ae^{-2t} - 10Ate^{-2t} + 6Ate^{-2t} = e^{-2t} \implies A = 1$$

Vi har dermed partikulærløsning $y_p = te^{-2t}$ og generell løsning

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + te^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Initialbetingelsene gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) &= -2c_1 - 3c_2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Dette kan vi løse med f.eks. gausseliminasjon og finne at $c_1 = 3$ og $c_2 = -2$, så

$$y = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + te^{-2t}.$$

Oppgave 9 La $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ være vektorrommet som består av polynomer av grad mindre enn eller lik 2, og med reelle koeffisienter.

La $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ der

$$p_1(x) = x^2 + 1, \qquad p_2(x) = 6x^2 + x + 2, \qquad p_3(x) = 3x^2 + x.$$

Mengden S danner en basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (du trenger ikke å vise dette).
Finn koordinatvektoren til $q(x) = x^2 + 2x + 3$ med hensyn til basisen S.
Løsning:
Vi må finne a, b og c slik at

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= a(x^2+1) + b(6x^2 + x + 2) + c(3x^2 + x) \\ &= (a + 6b + 3c)x^2 + (b + c)x + (a + 2b) \end{aligned}$$

Hvis vi sammenligner koeffisienter på høyre og venstre side får vi ligningssystemet

$$\begin{cases} a + 6b + 3c = 1 \\ \qquad b + \ \ c = 2 \\ a + 2b \qquad\ \ = 3 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Vi får altså at $a = 19$, $b = -8$ og $c = 10$ og at koordinatvektoren til $q(x)$ med hensyn til S er

$$[\mathbf{q}]_S = \begin{bmatrix} 19 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Oppgave 10 La V være et indreproduktrom og la $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to vektorer i V slik at både $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Vis at dersom $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale, så er de også lineært uavhengige.
Løsning:
Anta at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale, altså at $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. Vi må vise at ligningen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ da kun har løsningen $c_1 = c_2 = 0$.
La oss ta indreproduktet av både høyre og venstre side av $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ med $\mathbf{v}_1$. Da får vi

$$\begin{aligned} \langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \mathbf{v_1} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_1 \rangle &\iff c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \\ &\iff c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \quad (\text{fordi } \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 0) \end{aligned}$$

Siden $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ så er $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \neq 0$, og dermed må $c_1 = 0$.
Da står vi igjen med $c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, som kun har løsning $c_2 = 0$, siden $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$.
Dermed er både $c_1 = 0$ og $c_2 = 0$, altså har $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ kun triviell løsning, som betyr at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.