



Oppgave 1 La $p(z) = z^3 + 27$. Finn alle røttene til $p(z)$, skriv røttene på standardform og skissér røttene i det komplekse planet.

Oppgave 2 Se på punktene $(1, 5)$, $(-1, 9)$ og $(2, 12)$ i $\mathbb{R}^2$.

- a) Finn et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom punktene.
- b) Bruk minste kvadraters metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til de tre punktene.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & a^2 - 2 \end{bmatrix}, \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R}.$$

- a) For hvilke reelle tall a er matrisa A inverterbar?
- b) For hvilke reelle tall a har ligningen

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a - 4 \end{bmatrix}$$

- ingen løsning?
- nøyaktig én løsning?
- uendelig mange løsninger?

Oppgave 4 La $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ være vektorrommet bestående av reelle 2×2 -matriser. Vi ser på følgende delmengde av $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

U består altså av alle reelle 2×2 -matriser A , som er slik at $A^T = -A$.

- a) Vis at U er et underrom av $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Hint: Du kan få bruk for at $(A + B)^T = A^T + B^T$ og at $(cA)^T = c \cdot A^T$.
- b) Finn en basis for U og angi dimensjonen til U .

Oppgave 5 En lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen A som hører til transformasjonen T , og avgjør om T er injektiv og/eller surjektiv.

Oppgave 6

a) Vis at

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 9x_3 y_3$$

er et indreprodukt på $\mathbb{R}^3$.

b) Finn en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^3$ spent ut av vektorene

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

med hensyn til indreproduktet i a).

Oppgave 7 La

$$A = \begin{bmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R} \text{ og } a \neq b.$$

a) Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$ og bestem et uttrykk for A^k , der k er et vilkårlig positivt heltall.

b) Finn den generelle løsningen av følgende system av differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

og finn så løsningen av systemet som tilfredsstiller $y_1(0) = 2$ og $y_2(0) = -4$.

Oppgave 8 Finn generell løsning av $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}$ og løs for initialbetingelser $y(0) = y'(0) = 1$.

Oppgave 9 La $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ være vektorrommet som består av polynomer av grad mindre enn eller lik 2, og med reelle koeffisienter.

La $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ der

$$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = 6x^2 + x + 2, \quad p_3(x) = 3x^2 + x.$$

Mengden S danner en basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (du trenger ikke å vise dette).

Finn koordinatvektoren til $q(x) = x^2 + 2x + 3$ med hensyn til basisen S .

Oppgave 10 La V være et indreproduktrom og la $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to vektorer i V slik at både $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Vis at dersom $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale, så er de også lineært uavhengige.