Institutt for matematiske fag

Oppgåve 1 La $p(z) = z^3 + 27$. Finn alle røtene til $p(z)$, skriv røtene på standardform og skissér røtene i det komplekse planet.

Oppgåve 2 Sjå på punkta $(1, 5), (-1, 9)$ og $(2, 12)$ i $\mathbb{R}^2$.

a) Finn eit andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom punkta.

b) Bruk minste kvadrats metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passar best til dei tre punkta.

Oppgåve 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & a^2 - 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{kor } a \in \mathbb{R}.$$

a) For kva reelle tall a er matrisa A inverterbar?

b) For kva reelle tall a har likninga

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a - 4 \end{bmatrix}$$

- ingen løysing?
- nøyaktig éi løysing?
- uendeleg mange løysingar?

Oppgåve 4 La $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vere vektorrommet beståande av reelle 2×2-matriser. Vi ser på følgande delmengd av $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

U består altså av alle reelle 2×2-matriser A, som er slik at $A^T = -A$.

a) Vis at U er eit underrom av $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Hint: Du kan få bruk for at $(A + B)^T = A^T + B^T$ *og at* $(cA)^T = c \cdot A^T$.

b) Finn ein basis for U og angi dimensjonen til U.

Oppgåve 5 Ein lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisa A som høyrer til transformasjonen T, og avgjer om T er injektiv og/eller surjektiv.

Oppgåve 6

a) Vis at

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 9x_3y_3$$

er eit indreprodukt på $\mathbb{R}^3$.

b) Finn ein ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^3$ spent ut av vektorane

$$\left\{ \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \right\}$$

med omsyn til indreproduktet i a).

Oppgåve 7 La

$$A = \begin{bmatrix}a & b-a\\0 & b\end{bmatrix} \text{ kor } a, b \in \mathbb{R} \text{ og } a \neq b.$$

a) Finn ei inverterbar matrise P og ei diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$ og bestem eit uttrykk for A^k, kor k er eit vilkårleg positivt heiltal.

b) Finn den generelle løysinga av følgande system av differensiallikningar

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix}-2 & 5\\0 & 3\end{bmatrix}\mathbf{y}$$

og finn så løysinga av systemet som tilfredsstiller $y_1(0) = 2$ og $y_2(0) = -4$.

Oppgåve 8 Finn generell løysing av $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}$ og løys for initialvilkår $y(0) = y'(0) = 1$.

Oppgåve 9 La $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ vere vektorrommet beståande av polynom av grad mindre enn eller lik 2, og med reelle koeffisientar.

La $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ kor

$$p_1(x) = x^2 + 1, \qquad p_2(x) = 6x^2 + x + 2, \qquad p_3(x) = 3x^2 + x.$$

Mengda S utgjer ein basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (du treng ikkje å vise dette).
Finn koordinatvektoren til $q(x) = x^2 + 2x + 3$ med omsyn til basisen S.

Oppgåve 10 La V vere eit indreproduktrom og la $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ vere to vektorar i V slik at både $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Vis at dersom $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale, så er dei også lineært uavhengige.