

# Plenumsregning 1: Komplekse tall

## Ekstraoppgaver

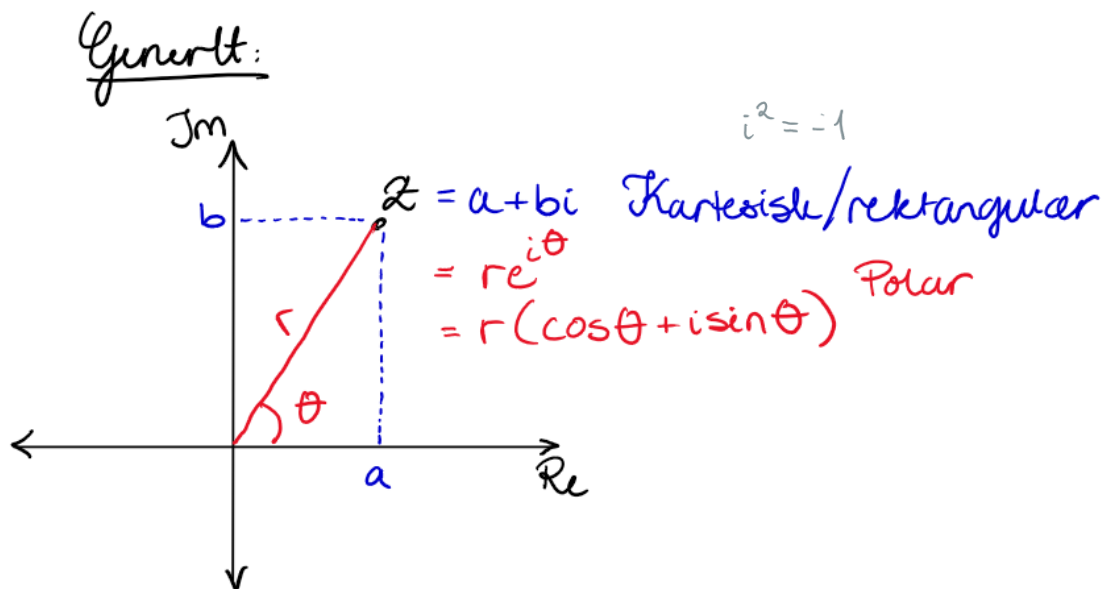
### Oppgave 1

Beregn og merk av i det komplekse planet. Husk at det kan være lurt å bruke polarform.

b)  $(1 + i) \cdot (1 + \sqrt{3}i)$

Det komplekse planet inneholder en reell akse og en imaginær akse. Komplekse tall befinner seg i det komplekse planet, og har en reell komponent og en imaginær komponent. Vi kan illustrere et generelt komplekst tall  $z$  slik:

$$(1+i)(1+\sqrt{3}i) = ?$$



Kartesiske og polare koordinater er to forskjellige måter å oppgi posisjonen til tallet vårt.

- Kartesisk:  $a$  steg i reell retning +  $b$  steg i imaginær retning.
- Polar: med en vinkel  $\theta$  fra den reelle akse, beveger vi oss en lengde  $r$ .

Regne ut:

$$(1+i)(1+\sqrt{3}i)$$

$z_1 \quad z_2$

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Strategi: Polarform

$$z_1 = 1+i$$

$a=1 \quad b=1$

$$r_1, \theta_1 = ?$$

Pythagoras:  $r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Trigonometri:  $\tan \theta_1 = \frac{\text{mot}}{\text{nos}} = \frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_2 = 1+\sqrt{3}i$$

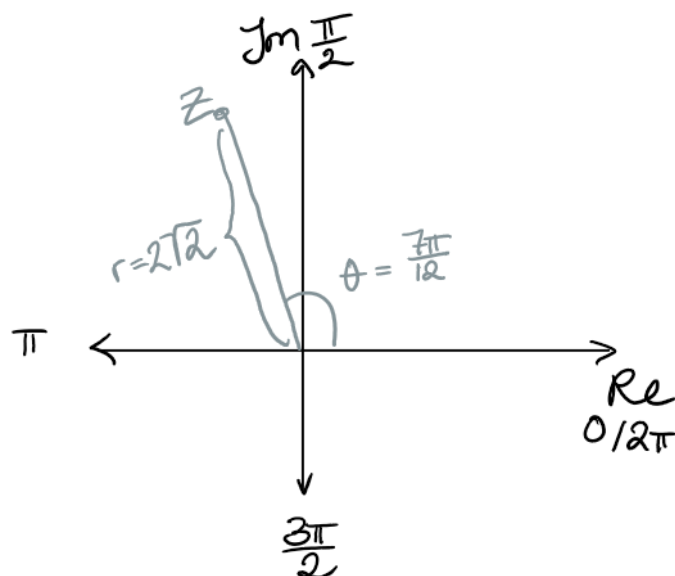
$$r_2^2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \underline{\underline{2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}}}$$

**Tips:** Hvis vi synes det er krevende å tegne reelle tall ut fra polarformen, kan vi bytte fra polare til rektangulære/kartesiske koordinater. Da regner vi ut  $a = r\cos\theta$  og  $b = r\sin\theta$ .



e)  $\frac{1+2i}{1-2i}$

Fra forelesningsnotatene:

**Teorem 1.2.** La  $z = a + bi$  og  $w = c + di$  være komplekse tall. Vi har

$$z + w = a + c + (b + d)i$$

$$z - w = a - c + (b - d)i$$

$$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Vi kan pugge teoremer, men for oss som har dårlig husk er det kanskje like greit å gange med den komplekskonjugerte oppe og nede:

$$e) \frac{1+2i}{1-2i} \cdot \frac{(1+2i)}{(1+2i)} = \frac{1+2i+2i+4i^2}{1-2i+2i-2i^2} = \frac{1+4i-4}{1+4} = \frac{1}{5}(-3+4i)$$

*(Handwritten notes: Red circles around  $4i^2$  and  $-2i^2$  with  $= -1$  above and  $= -1$  below)*

c)  $\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$  (Ikke gjennomgått)

$$\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} \neq \frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}$$

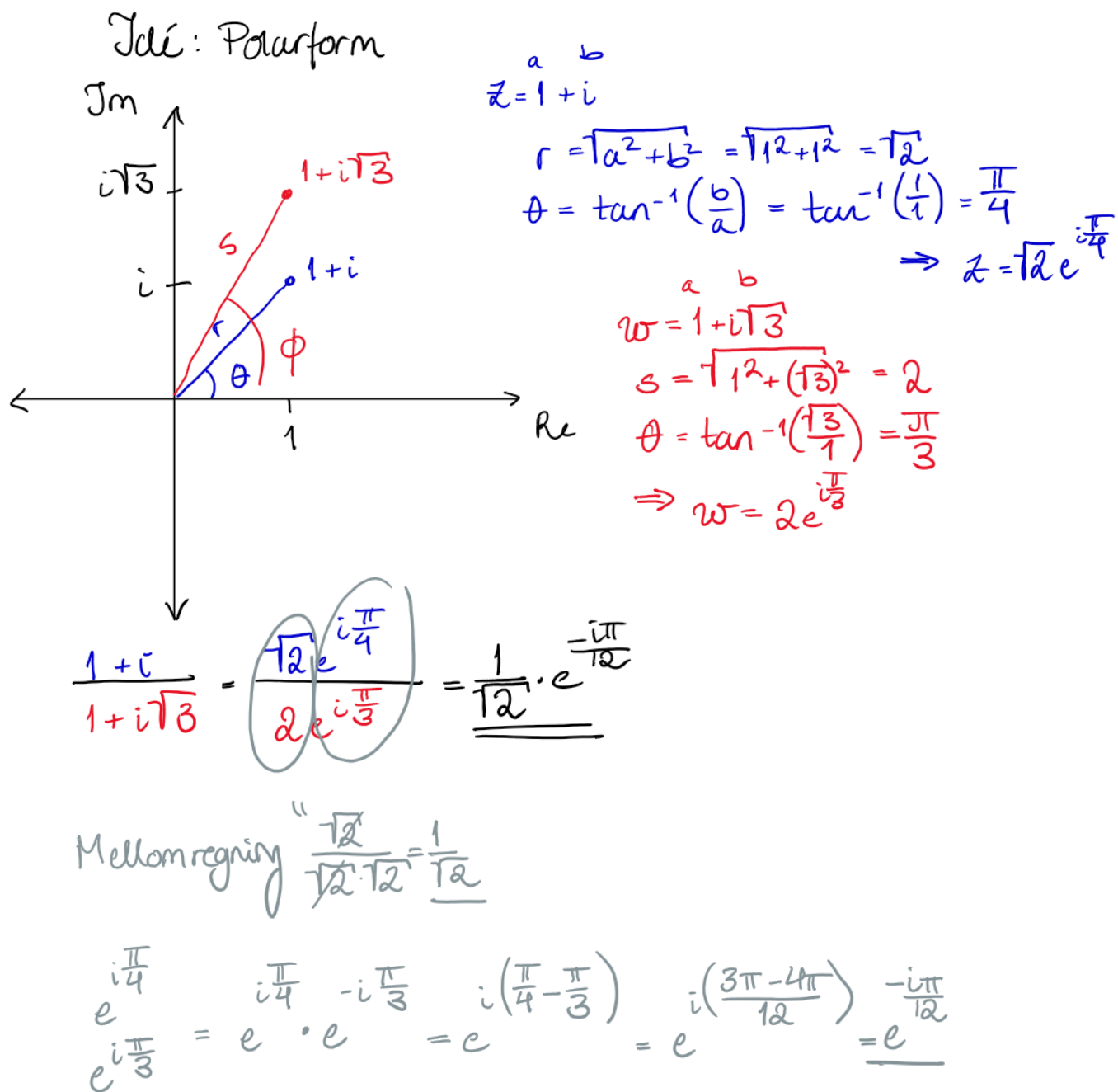
Dette finnes det også et teorem for:

**Teorem 1.7.** La  $z = re^{i\theta}$  og  $w = se^{i\alpha}$ . Da gjelder:

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)}$$

... som vi skal demonstrere:



### Oppgave 3

La  $z = a + bi$ . Finn real- og imaginærdelen til

d)  $\frac{1}{z^2}$   $z = a + bi$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(a+bi)^2} = \frac{1}{a^2 + 2abi + b^2 \underbrace{i^2}_{=-1}} = \frac{1}{\underbrace{a^2 - b^2}_w + \underbrace{2abi}_{yi}}$$

Igjen skal vi benytte oss av trikset med å gange med den komplekskonjugerte oppe og nede:

**TRIKS:** Gange med den konjugerte oppe og nede.

Husk:  $w = x + yi \Rightarrow \bar{w} = x - yi$

Se på:  $\overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2 - b^2 + 2abi} \cdot \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{a^2 - b^2 - 2abi} = \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{(a^2 - b^2)^2 - (2abi)^2}$$

**Husk:** 3. kvadratsetning

$$(x + y)(x - y) = (x^2 - y^2)$$

$$= \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{(a^2 - b^2)^2 - 2^2 a^2 b^2 \overset{-1}{i^2}} = \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{a^2 - b^2}{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2}}_{\text{Reell}} - i \underbrace{\frac{2ab}{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2}}_{\text{Imaginær}}$$

### Oppgave 9

La  $z \neq 0$  og  $w \neq 0$  være komplekse tall. Vis at  $zw \neq 0$ .

Vet:  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z, w \neq 0$

Vil vise:  $z \cdot w \neq 0$

Idé: Skrive på polarform

Beweis:

$$\left. \begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ w &= se^{i\phi} \end{aligned} \right\} r, s, \theta, \phi \in \mathbb{R}$$

Da må  $r, s \neq 0$  (hvis ikke ville  $z$  og  $w$  vært 0)

$$z \cdot w = re^{i\theta} \cdot se^{i\phi} = \underbrace{rs}_{\neq 0} \underbrace{e^{i(\theta+\phi)}}_{\neq 0} \quad (\text{finnes ikke noe tall vi kan opphæve e i for å få 0})$$

$$\Rightarrow \underline{z, w \neq 0} \quad \square$$

## Innlevering 1 H2023 TMA4110

### Oppgave 6

Finn real- og imaginærdelen til  $z = i^3 + i^i$ .

Vi ønsker altså å skrive  $z$  på kartesisk form. Dette må vi gjøre i flere steg.

$$z = i^3 + i^i$$

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \quad (\text{polar}) \\ z &= a + bi \quad (\text{kartesisk}) \end{aligned}$$

Vi skriver først om tallet  $i^3$ :

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = \underline{-i}$$

Vi finner så tallet  $i$  på polarform. Legg merke til at her kan vi ikke benytte  $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  for å finne vinkelen, men vi kan lese det av figuren:

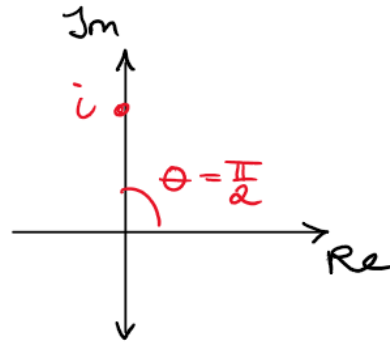
$$i = 0 + 1i \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) \quad \swarrow$$

Ser av figuren at  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \underline{i = e^{i\frac{\pi}{2}}}$$



Deretter setter vi inn for  $i$  i uttrykket for  $i^i$ :

$$\textcircled{i}^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\frac{\pi}{2} \cdot i} = e^{\textcircled{i2}\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Til slutt setter vi inn for  $i^3$  og  $i^i$  i det opprinnelige uttrykket for  $z$ :

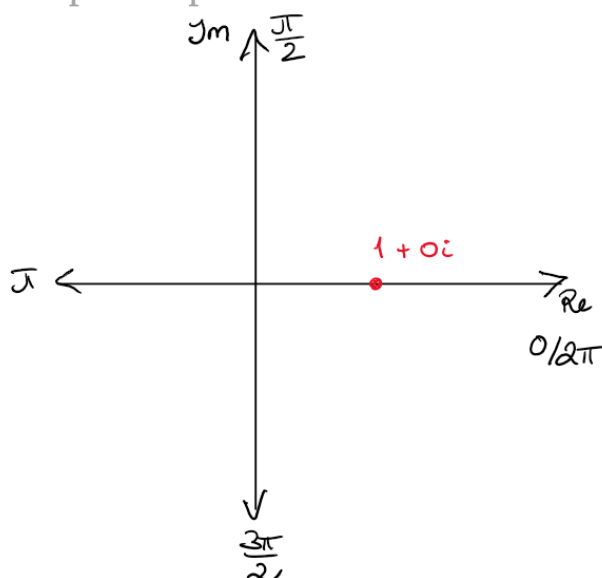
$$\Rightarrow z = i^3 + i^i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Imaginær}}}{-i} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reell}}}{e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

### Oppgave 8

Finn alle tredjerrøttene til 1.

Tegn en rett linje fra løsning til løsning etter økende vinkel. Hvilken geometrisk figur er dette?

Når vi jobber med komplekse tall bør vi alltid tegne disse i det komplekse planet:



$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\theta = 0 \quad (\text{ser av figuren})$$

Vi ønsker nå å løse følgende problem:

$$\text{Finne alle } z \text{ s.a. } z^3 = 1$$

Jmfr. algebraens fundamentalteorem vil et 3. gradspol. alltid ha 3 komplekse røtter:

### Algebraens fundamentalteorem

La  $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, c_i \in \mathbb{C}$ .

Da finnes komplekse tall  $r_1, r_2, \dots, r_n$  slik at

$$p(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

Dvs. et  $n$ -te gradspolynom har alltid  $n$  komplekse røtter.

3. gradspolynom  $\Rightarrow$  3 komplekse røtter

$$\text{Finne alle } z \text{ s.a. } z^3 = 1$$

$$\underbrace{z_0, z_1, z_2}_{?}$$

For å løse denne oppgaven kan vi memorere følgende oppskrift:

### OPPSKRIFT

- 1) Skriv  $z$  på polarform
- 2) Røttene er på formen

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}$$

- 3) Det er  $n$  ulike komplekse røtter. For  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  regner vi ut vha. formelen over.

Vi skal likevel heller utlede denne formelen. Igjen kan polarformen være til nytte:

$$z^3 = 1$$

$$(r e^{i\theta})^3 = 1$$

$$r^3 e^{i3\theta} = 1 e^{i0}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \searrow \\ r^3 = 1 & & e^{i3\theta} = e^{i(0 + 2\pi k)} \end{array}$$

$$r = \sqrt[n]{1} = 1$$

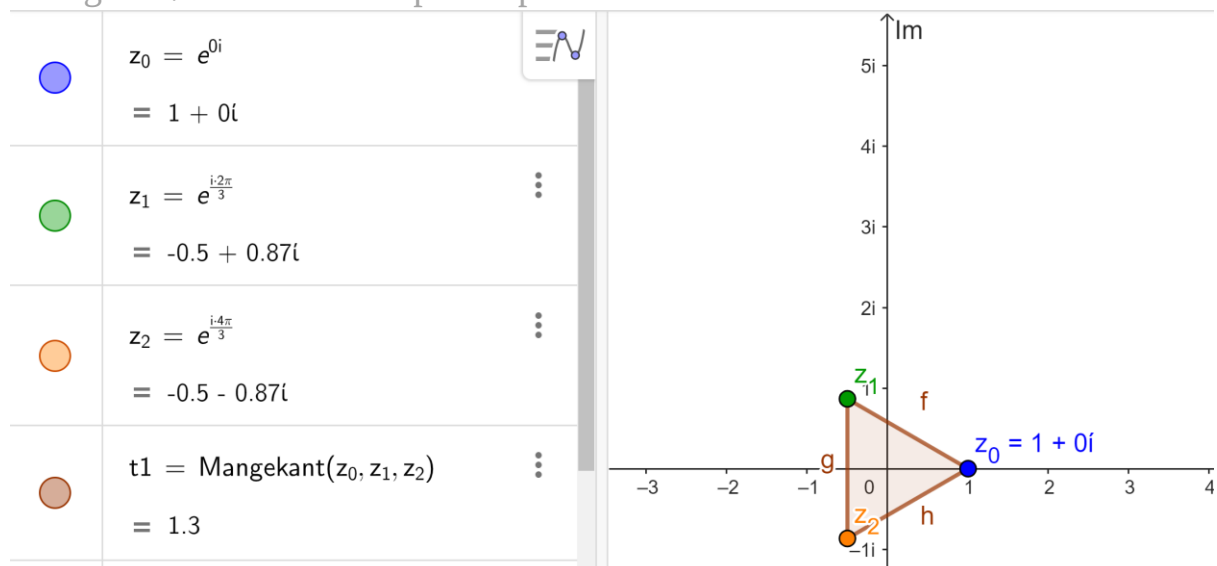
$$\begin{aligned} 3\theta &= 0 + 2\pi k \\ \theta &= \frac{0 + 2\pi k}{3} \end{aligned}$$

$$k=0: z_0 = 1e^{i\frac{(0+2\pi \cdot 0)}{3}} = 1$$

$$k=1: z_1 = 1e^{i\frac{(0+2\pi \cdot 1)}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$k=2: z_2 = 1e^{i\frac{(0+2\pi \cdot 2)}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Vi tegner røttene i det komplekse planet:



Merk:

- $z_1$  og  $z_2$  er hverandres komplekskonjugerte. Generelt er det slik at hvis alle koeffisientene  $c_i$  er reelle og  $r = a + ib$  er en rot, så er også og  $\bar{r} = a - ib$  en rot.
- $z_0, z_1, z_2$  er ekvidistante. Generelt er det slik at de  $n$  n-te røttene til et komplekst tall  $z$  vil være punkter med lik avstand rundt sirkelen med radius lik  $|z|^{\frac{1}{n}}$ .

## Eksamen H2023 TMA4110

## Oppgave 3

Bestem alle komplekse løsningene til ligningen

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0.$$

Skriv løsningene på polarform. *Hint: Klarer du å se én løsning direkte?*

$$\begin{array}{c} \textcircled{*} \\ \hline z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0 \end{array}$$

Strategi: Faktoriser  $\textcircled{*}$ 

Vi bruker hintet og begynner å gjette løsninger:

Gjett:  $z=0$ :  $0^3 - 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 4 \neq 0 \Rightarrow z=0$  er IKKE en rot  $\times$

$z=1$ :  $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 1 - 3 + 6 - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$  er en rot  
 $\Rightarrow (z-1)$  deler  $\textcircled{*}$

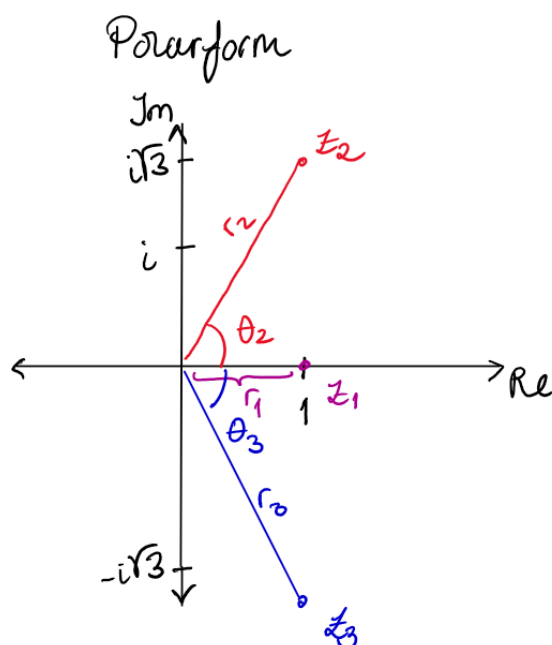
[Polynomdivisjon]

$$\begin{array}{r} (z^3 - 3z^2 + 6z - 4) : (z-1) = \underline{z^2 - 2z + 4} \\ \underline{-z^3 + z^2} \phantom{+ 6z - 4} \\ -2z^2 + 6z \phantom{- 4} \\ \underline{+2z^2 - 2z} \phantom{- 4} \\ 4z - 4 \\ \underline{-4z + 4} \\ 0 \end{array}$$

abc-formel :  $a=1$   $b=-2$   $c=4$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1 \cdot 12}}{2} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{i^2 \cdot 2^2 \cdot 3}}{2} \quad \begin{array}{l} -1 = i^2 \\ \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \end{array} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = \cancel{\frac{2}{2}} (1 \pm i\sqrt{3}) \\
 &= \begin{cases} z_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ z_3 = 1 - i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{Kartesisk form}
 \end{aligned}$$

Vi tegner  $z_0, z_1$  og  $z_2$  inn i koordinatsystemet og skriver til slutt på polarform:



Ser av figuren at

$$z_1 \begin{cases} r_1 = 1 \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z_1 = e^{i0\pi}}$$

$$z_2 \begin{cases} r_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

Observer:  $z_2$  og  $z_3$  er hverandres komplekskonjugerte

$$z_3 \begin{cases} r_3 = 2 \\ \theta_3 = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{+2\pi} \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \underline{z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}}$$

Merk nå at disse røttene IKKE er ekvidistante!