

Plenumsregning 2: Mer om komplekse tall + lineære likningssystemer

Eksempel fra kapittel 2:

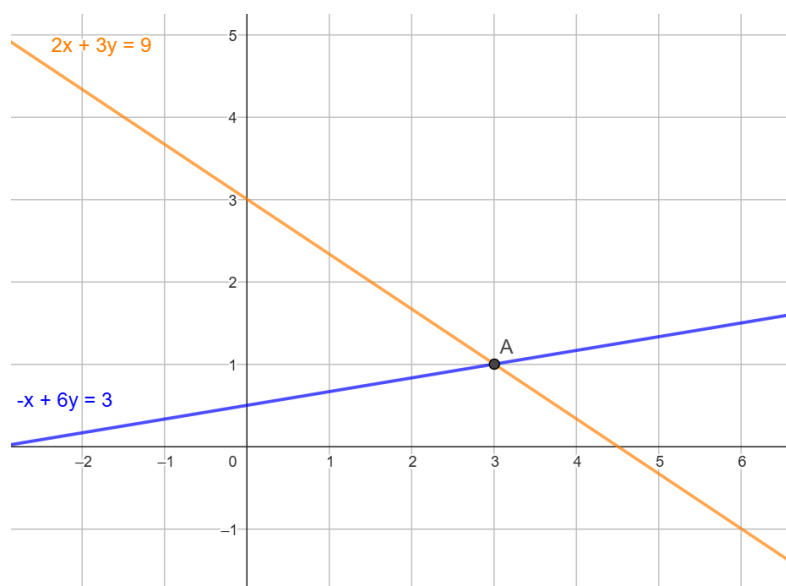
Løs likningssystemet

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 2x + 3y = 9 \\ \text{II.} & -x + 6y = 3 \end{array}$$

Denne oppgaven kan løses på flere måter, både grafisk, ved innsetningsmetoden, addisjonsmetoden og matrisemetoden. Vi skal se på hver av disse.

Alternativ 1: Grafisk

Dersom vi tegner grafen for hver av disse likningene i et koordinatsystem (f.eks. ved bruk av Geogebra), ser vi at grafene skjærer hverandre i punktet (3,1). Altså er begge likningene oppfylt samtidig når $x = 3$ og $y = 1$. Denne løsningsmetoden er nok kjent fra VGS og er effektiv når vi har digitale hjelpemidler tilgjengelig.



Alternativ 2: Innsetningsmetode

På VGS har vi antakeligvis vært vant til å løse systemer med to likninger og to ukjente ved *innsetningsmetoden*. Da tar vi utgangspunkt i én av likningene og lager et uttrykk for en av variablene, som vi så setter inn i den andre likningen:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & -x + 6y = 3 \rightarrow x = 6y - 3 = 6 \cdot 1 - 3 = \underline{3} \\ \text{II)} & 2x + 3y = 9 \leftarrow \\ & 2(6y - 3) + 3y = 9 \\ & 12y - 6 + 3y = 9 \\ & \underline{y = 1} \end{array}$$

Denne metoden er fin å bruke dersom vi har systemer med svært få likninger og få ukjente.

Alternativ 3: Addisjonsmetode

Da jeg gikk på VGS lærte vi også å løse likninger ved *addisjonsmetoden*. Her adderer vi en multiplum av likningene for å eliminere én og én variabel:

$$\text{I)} -x + 6y = 3$$

$$\text{II)} 2x + 3y = 9 \quad | + 2 \cdot (\text{I})$$

$$2x + 3y + 2(-x + 6y) = 9 + 2 \cdot 3$$

$$2x + 3y - 2x + 12y = 15$$

$$\underline{y = 1}$$

$$\text{I)} -x + 6y = 3 \quad | + (-2)(\text{II}) \quad -x + 6y - 2(2x + 3y) = 3 - 2 \cdot 9$$

$$\text{II)} 2x + 3y = 9$$

$$-x - 4x = -15 \rightarrow -5x = -15$$

$$\underline{x = 3}$$

Denne metoden fungerer også, men etter hvert som vi ser på større systemer vil vi oppdage at vi må skrive mye. Det har vi ikke lyst til, og derfor skal vi istedenfor benytte *matrisemetoden*, eller *Gauss-eliminering*:

Alternativ 4: *Matrisemetode / Gauss-eliminering*

$$\begin{array}{l} \text{I)} -x + 6y = 3 \\ \text{II)} 2x + 3y = 9 \end{array} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}}_b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{array} \right] \downarrow 2$$

For å løse problemet, altså finne verdier for x og y som tilfredsstiller likningene, skal vi manipulere systemet ved å utføre såkalte elementære radoperasjoner:

Radoperasjoner

1. **Gange** alle tallene i en rad med det samme tallet. Dette tilsvarer å gange likningen med et tall. Vi kan ikke gange med 0.
2. **Legge til** et multiplum av en rad til en annen rad. Dette er å kombinere likninger til nye likninger.
3. Bytte **rekkefølge** på radene. Dette er det samme som å bytte rekkefølge på likningene.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 15 & 15 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{15} \right) \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xleftarrow{(-6)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \cdot (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 0y = 3 \\ 0x + 1y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Denne metoden er egentlig den samme som addisjonsmetoden, men vi skriver mindre fordi vi kun skriver koeffisientene til de ukjente. Det er denne metoden vi i hovedsak benytter oss av i dette kurset. I neste oppgave ser vi på større system, 3 likninger med 3 ukjente:

Oppgave 4

a) Løs likningssettene

$$2x - y + z = 0$$

$$3x + y - 6z = 0$$

$$4x - 2y + 2z = 0$$

og

$$2x - y + z = 1$$

$$3x + y - 6z = 4$$

$$4x - 2y + 2z = 2$$

og forklar sammenhengen mellom løsningsmengdene.

Skriver likningssettene på **matriseform** ved å kopiere koeffisientene:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

Homogut sys. $A\vec{x} = \vec{0}$ Inhomogut sys. $A\vec{x} = \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Systemet til venstre (i grønt) er et såkalt *homogent likningssystem*, hvor høyresiden er $\mathbf{0}$, mens systemet til høyre (i oransje) er et *inhomogent system*, hvor høyresiden er forskjellig fra $\mathbf{0}$.

Vi skal løse disse hver for seg vha. radoperasjoner:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\left(\frac{-3}{2} \right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot \left(\frac{1}{2} \right)} \xrightarrow{\cdot \left(\frac{2}{5} \right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\left(\frac{1}{2} \right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x & -z = 0 \\ y & -3z = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3z \\ z=t, \text{ } t \text{ skalar} \end{cases}$$

z fri variabel

Rekkefølgen vi gjør operasjonene i varierer, men i utgangspunktet ønsker vi å få til en slags trappeform (dette kommer vi tilbake til i en senere oppgave), med 0-er nederst og lengst til venstre.

Vi ser at variablene x og y er avhengig av variabelen z . z kalles en **fri variabel**. Det er vanlig å gi den frie variabelen et nytt navn, og vi kaller den t . Vi kan velge t fritt blant alle skalarer, da alle disse vil fungere som løsninger for likningssystemet. Med andre ord har dette likningssystemet **uendelig mange løsninger**. Vi kan skrive løsningen på vektorform, dette blir en forsmak på neste kapittel:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \begin{array}{l} \text{"For alle"} \\ \text{"} \forall t \in \mathbb{R} \text{"} \\ \text{"Element i"} \end{array}$$

Vi skal, gjennom dette kapittelet, erfare at likningssystemer kan ha:

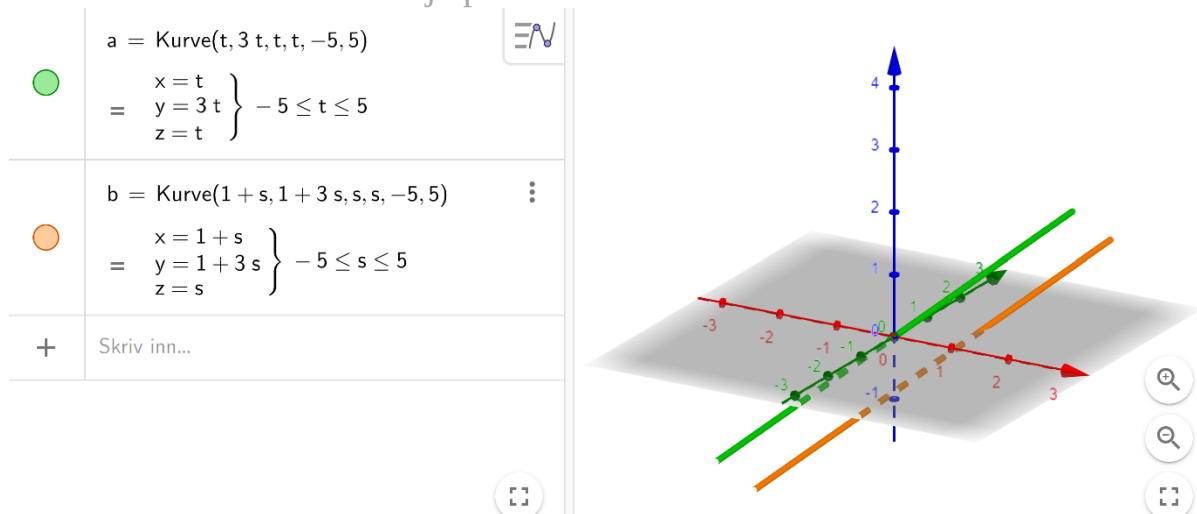
- 1) Ingen løsninger
- 2) Nøyaktig én løsning
- 3) Uendelig mange løsninger

Tilsvarende utfører vi radoperasjoner for det **inhomogene likningssystemet**, men denne gangen overlater jeg mellomregningene til dere (:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ z = s \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 3s \\ z = s \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Løsningsmengdene for hvert av likningssystemene svarer til en rett linje i $\mathbb{R}^3$, parametrisert ved de frie variablene t og s . Linjene vil være parallelle. Dette kan vi illustrere f.eks. ved hjelp av GeoGebra:



b) Kan du finne a, b og c slik at

$$2x - y + z = a$$

$$3x + y - 6z = b$$

$$4x - 2y + 2z = c$$

ikke har noen løsning?

- Altså, kan vi finne verdier for a, b og c sånn at dette systemet ikke har noen løsning?
- Først, når er det et system ikke har løsninger? Jo, et system har ikke noen løsning(er) dersom vi har en rad (altså en likning) med *selvmotsigelser*.
- Vi har en **selvmotsigelse** dersom vi har en rad hvor noe som er 0 er lik noe som IKKE er 0. Noe sånt som dette:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right] \quad k \neq 0 \quad \rightarrow$$

Mål: Finne a, b, c s.a. vi får en *selvmotsigelse*

Da vi løste det **homogene likningssystemet** i oppgave a) så vi at siste rad ble en nullrad når a, b, c alle var 0:

Hush: I a) så vi at siste rad ble en nullrad når

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nå skal vi prøve å **gjette** på noen konstanter a, b, c som gir oss 0-er på venstre side, og noe som IKKE er 0 på høyre side.

Vi prøver med $a = 0, b = 0$ og $c = 1$.

Idé: Prøve $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-2)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$0x + 0y + 0z = 1 \quad \rightarrow \text{Selvmotsigelse}$$

Gjør: $a = b = 0, c = 1$ gjør systemet *inkonsistent*

Oppgave 2

Hvilke av disse matrisene er på trappeform?

Hvilke av dem er på redusert trappeform?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

For å løse oppgaven må vi vite hva trappeform og redusert trappeform er, og da må vi først vite hva et pivotelement er:

Def: Tallet lengst til venstre i en rad som ikke er 0 kalles **pivotelementet** for den raden. En nullrad har ikke noe pivotelement.

Def: En matrise er på **trappeform** dersom:

- pivotelementet i hver rad er lengre til høyre enn pivotelementet i raden over
- Eventuelle nullrader er nederst.

Def: En matrise er på **redusert trappeform** hvis den er på trappeform og dessuten oppfyller:

- Alle pivotelementene er 1.
- Alle tall som står over pivotelementer er 0.

a) $\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$ Pivotelement

Trappeform fordi pivotelt. i hver rad er lengre til høyre enn i raden over

Redusert trappeform fordi alle pivotelt. er 1 og alle tall over disse er 0.

b) $\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} \\ 0 & \textcircled{-1} \end{bmatrix}$ Verken trappeform eller red. trappeform

- Ikke på **trappeform** fordi ikke alle **pivotelementer** har 0 under seg.
- Når matrisen ikke er på **trappeform** kan den heller ikke være på **redusert trappeform**.

e) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Trappeform, men ikke redusert*

Veldig uformelt kan vi si at en matrise på trappeform kan ha lange steg, men ikke bratte.

Oppgave 3

Løs likningssystemet med totalmatrise

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \sim \begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{g}(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (i = -i) \\ i(-i) = -i^2 = 1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

↑ Fri variabel

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \begin{matrix} \text{skalar} \\ t \end{matrix}$$

Oppgave 6

Anta at vi har et likningssystem med m likninger og n ukjente. Hvilke av de ni forskjellige tilfellene i følgende tabell er mulige?

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
Ingen løsninger	M	M	M
Én løsning	U	M	M
Uendelig mange løsninger	M	M	M

M = Mulig
U = Umulig

"antall"
 $m = \#$ likninger (rader)
 $n = \#$ ukjente (kolonner)

Strategi: Eksempel på at det er mulig

Vi tar for oss hvert av tilfellene. Først, la oss se på dette med 'Ingen løsninger'
 - Uavhengig av antall rader/kolonner kan vi ha selvmotsigelser i systemet, og dermed ingen løsninger:

INGEN LØSN.

↳ Uavh. av # rader, kan vi alltid finne et sys. med minst én selvmotsigelse (M)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

∞ LØSN.

↳ Én/ flere frie variable

1) $m < n$

Ex: $x + y = 0$
 y fri $\Rightarrow$ (M)

2) $m = n$

Ex: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ $x + y = 0$
 $y = t$ (M)

3) $m > n$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (M)$$

NDYKTIG ÉN LØSN.

1) $m = n$

Én løsn.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (M)$$

2) $m > n$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \textcircled{M}$$

3) $m < n$

↳ Flere uløste $\Rightarrow$ Frie variable $\Rightarrow$ ∞ mange løsn.
 ↳ Selvmotigheter $\Rightarrow$ 0 løsn.

$\Rightarrow$ En løsn. UMUNIA

Oppgave 8

La z være en løsning av likningen $z^2 + z + 1 = 0$.

Finn en løsning av likningssystemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & 0 & 0 \\ 1 & z^2 & z & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2 løsn. av $z^2 + z + 1 = 0$ $\textcircled{*}$

Vi skriver opp systemet og kvitter oss med 1-tallene i første kolonne:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & 0 & 0 \\ 1 & z^2 & z & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{(-1)}]{\text{(-1)}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & z-1 & z^2-1 & -3 & -9 \\ 0 & z^2-1 & z-1 & -3 & -9 \end{array} \right] \cdot (-1/2)$$

Vi bruker antakelsen om z , og erstatter $z^2 - 1$ med $-z - 2$:

$$\textcircled{*} \quad \begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0 & | -2 \\ z^2 - 1 &= -z - 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & z-1 & -z-2 & -3 & -9 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -18 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & z-1 & -z-2 & -3 & -9 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -18 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{(z+2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & z+1 & z+1 & 6z+3 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{2z+1}
 \end{aligned}$$

Vi bytter om på radene for å få matrisen på trappeform:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow x_1, x_2, x_3 = 1, x_4 = 2$$

Eksamen vår 2019

Oppgave 1

b) Finn alle komplekse løsninger av systemet

$$x - y + iz = 0$$

$$-x + iy - z = 0$$

I utgangspunktet er det få eksamensoppgaver som kun krever kunnskaper fra dette kapittelet.

Vi skriver systemet på matriseform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ -1 & i & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & -1+i & -1+i & 0 \end{array} \right] \cdot (-1-i)$$

Vi ganger med den komplekskonjugerte over og under brøkstrek. Vi skriver opp mellomregningen:

$$\text{Mellomregning: } (-1+i)(-1-i) = 1 + \cancel{i} - \cancel{i} - (-1) = 1 - (-1) = 2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + (1+i)z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -(1+i)t \\ y = -t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{C} \end{cases} \quad \underline{\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+i) \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad \forall t \in \mathbb{C}}}$$

Eksamen høst 2023

Oppgave 4 (tilpasset)

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Hvor mange løsninger har likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & -7 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 13 \\ -2 & -5 & 4 & -2 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Svar: Likningssystemet har nøyaktig én løsning