

Plenumsregning 3: Vektorligninger og matriser

Kapittel 3: Vektorlikninger

Oppgave 1

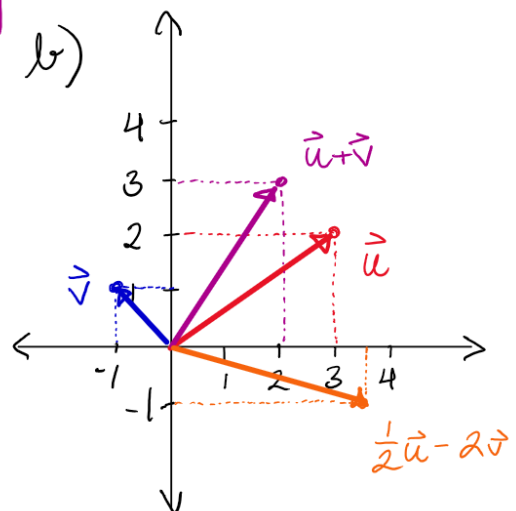
La $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$.

- a) Regn ut $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.
 b) Tegn en figur som viser vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ i planet.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a) \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Oppgave 2

Finn ut om en vektor er en lineærkombinasjon av de andre:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Her kan vi f.eks. prøve å finne ut om $\vec{w}$ er en **lineærkombinasjon** av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
 Altså, finnes det koeffisienter a og b slik at vi kan skrive $\vec{w}$ som en sum av
 skalarmultipler av $\vec{u}$ og $\vec{v}$? Med symboler:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ s.a. } \underbrace{a\vec{u} + b\vec{v}}_{\text{lin. komb.}} = \vec{w}?$$

skalarmultipler

Vi sjekker:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\begin{bmatrix} a+2b \\ 2a+3b \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{I) } a+2b=3 \\ \text{II) } 2a+3b=4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{(-2)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vi kontrollerer svaret ved å sette inn for $a = -1$ og $b = 2$ i (*) og ser om dette blir $\vec{w}$:

$$P: (*) \quad -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{w} \quad \checkmark$$

Svar: $\vec{w}$ kan skrives som en lin. komb. av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave 3

Finn en vektor som IKKE er en lineærkombinasjon av:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Husk: $\vec{x}$ er en lin.komb. av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ hvis $\exists a, b \in \mathbb{R}$
s.a. $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Her finnes det mange løsningsstrategier, og vi skal se på to av dem:

Strategi 1

- 1) Finne en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ som ER en lin.komb. av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$
- 2) Endre én komponent i $\mathbf{x}$ for å lage en ny vektor $\mathbf{y}$
- 3) Verifisere at $\mathbf{y}$ IKKE er en lin.komb. av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$

Vi skal jo bare konstruere en vektor som er en lin.komb. av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, så a og b kan vi velge fritt. F.eks. kan vi la $a = 1$ og $b = 1$:

① La $a = b = 1$:

$$\vec{x} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi vil vi vise at $\mathbf{y}$ IKKE er en lin.komb. av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, ved å sjekke at det IKKE finnes koeffisienter c og d slik at vi kan skrive $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} = \mathbf{y}$:

③ Vil vise: $c\vec{u} + d\vec{v} \neq \vec{y} \quad \forall c, d \in \mathbb{R}$

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{I)} \\ \text{II)} \\ \text{III)} \end{array} \begin{bmatrix} c+4d \\ 5c+18d \\ -3c+4d \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 18 & 23 \\ -3 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\cdot (-5) \\ \cdot 3}]{(-5)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 16 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot (-1/2)} \\ \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot (-16)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad \text{Selvmotsigelse} \\ 0 \neq 1$$

Vi får en selvmotsigelse i siste rad. Det betyr at det ikke finnes et entydig sett av koeffisienter som gjør at vi kan skrive $\vec{y}$ som en lineærkombinasjon av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

"Det finnes IKKE"

$$\Rightarrow \nexists c, d \in \mathbb{R} \text{ s.d. } c\vec{u} + d\vec{v} = \vec{y}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ er IKKE en lin.komb. av } \vec{u} \text{ og } \vec{v}$$

Det er også mulig å bare gjette på en vektor (start med enkle vektorer som

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ og sjekke!}$$

Det finnes riktignok en svært effektiv måte å lage en slik vektor. Da bruker vi kryssproduktet. Dette er sikkert kjent for noen fra VGS, men det er ikke definert i dette kurset.

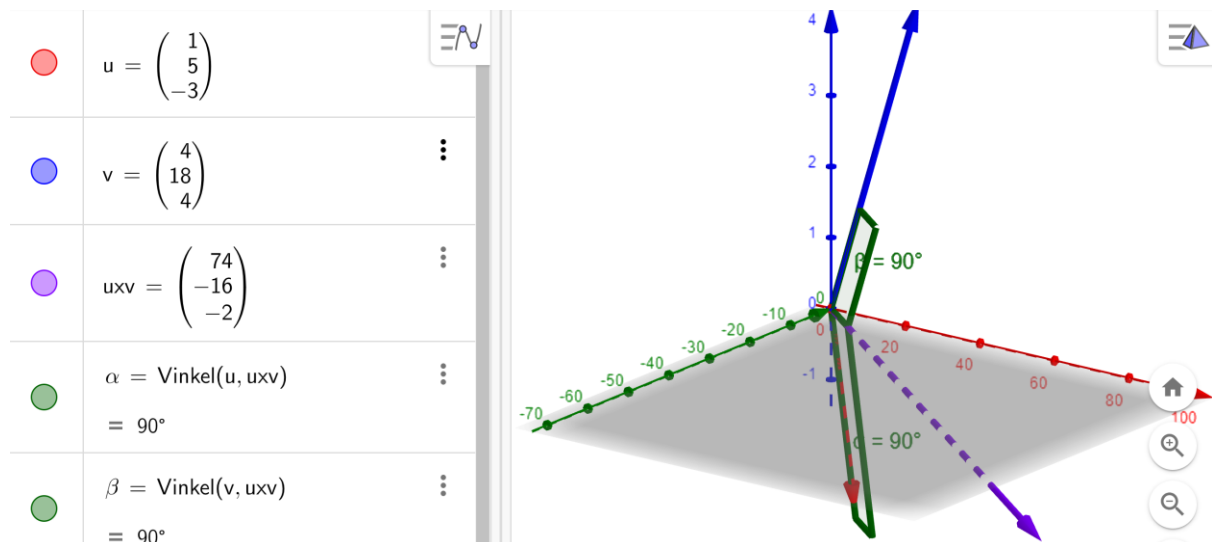
ALTERNATIV:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Det er kjent at $\vec{u} \times \vec{v}$ IKKE er en lin.komb. av $\vec{u}$ og $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 4 & 18 & 4 \end{vmatrix} = \vec{e}_1(5 \cdot 4 - (-3) \cdot 18) - \vec{e}_2(1 \cdot 4 - (-3) \cdot 4) + \vec{e}_3(1 \cdot 18 - 5 \cdot 4)$$

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 74\vec{e}_1 - 16\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 74 \\ -16 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$



Kryssproduktet står normalt på begge vektorene og er ikke en lin.komb. av dem.

Kapittel 4: Matriser

Oppgave 1

La A og B være matriser, og $\mathbf{v}$ en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Regn ut eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening:

- AB
- BA
- $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$

Generelt

Gitt matriser (og vektorer) $A_{r \times k}$ og $B_{m \times n}$, må $k = m$ for at vi skal kunne finne matriseproduktet $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$a) A_{3 \times 3} \cdot B_{2 \times 3}$$

$3 \neq 2 \rightarrow$ Gir ikke mening

$$b) B_{2 \times 3} \cdot A_{3 \times 3}$$

$3=3 \rightarrow$ Gir mening

2×3 dimensjoner

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-8) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-8) & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$c) \vec{v}^T \cdot \vec{v} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \vec{v}^T = [7 \ 2 \ -4]$$

Vi finner den transponerte ved å bytte om rader og kolonner, s.a. første rad blir første kolonne osv.

$$\vec{v}^T_{1 \times 3} \cdot \vec{v}_{3 \times 1}$$

$3=3$ Gir mening

1×1 dimensjon

$$[7 \ 2 \ -4] \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 7 \cdot 7 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) = \underline{\underline{69}}$$

Dette tilsvarer det vi kalte prikkprodukt på VGS.

Oppgave 4

Bestem om matrisene er inverterbare, og finn om mulig den inverse matrisen.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Def: La A være en $n \times n$ -matrise. En **invers** til A er en $n \times n$ -matrise B som er slik at $A \cdot B = I_n = B \cdot A$. En matrise er **inverterbar** hvis den har en invers.

Fremgangsmåte

- 1) Sett opp matrisen $(A|I)$.
- 2) Utfør Gauss-Jordan eliminasjon til redusert trappeform.
- 3) Matrisen til høyre er inversen.

$$[A|I] \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Identitetsmatrise}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/8 \end{array} \right] \xrightarrow{(-7)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & -7/8 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/8 \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{=A^{-1}}$

Eksamen vår 2019

Oppgave 6

La $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $q(x) = x^2 - x - 8$ og $r(x) = 4x^2 - 9x + 3$.

Avgjør om $r(x)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.

$$\text{La } \begin{cases} p(x) = 3x^2 - 3x - 6 \\ q(x) = x^2 - x - 8 \\ r(x) = 4x^2 - 9x + 3 \end{cases}$$

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ s.a. } r(x) = ap(x) + bq(x)?$$

$$a(3x^2 - 3x - 6) + b(x^2 - x - 8) = 4x^2 - 9x + 3$$

$$3ax^2 - 3ax - 6a + bx^2 - bx - 8b \stackrel{?}{=} 4x^2 - 9x + 3$$

$$\text{I)} \quad 3ax^2 + bx^2 = 4x^2 \rightarrow 3a + b = 4$$

$$\text{II)} \quad -3ax - bx = -9x \rightarrow -3a - b = -9$$

$$\text{III)} \quad -6a - 8b = 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -9 \\ -6 & -8 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -6 & -8 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 0 \neq 5 \\ \text{selvmotstrid} \end{array}$$

Svar: $r(x)$ kan IKKE skrives som en lin. komb. av $p(x)$ og $q(x)$ ettersom $\nexists a, b \in \mathbb{R}$ s.a. $a p(x) + b q(x) = r(x)$.

Dette er en eksamensoppgave. Vi skriver utfyllende med svarsetning for å demonstrere at vi har forstått oppgaven (viktig særlig ved eventuelle regnefeil).

Eksamen vår 2018

Oppgave 4

Anta at a, b, c og x, y, z er vilkårlige reelle tall.

a) Beregn matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z .

$$\text{a)} \quad \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{3} \times \text{3} \end{array} \begin{array}{c} \text{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{3} \times \text{3} \end{array} = \begin{array}{c} \text{A} \cdot \text{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & x+a & y+az+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Hva er den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c ?

$$b) [A | I] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \uparrow (-c) \\ \uparrow (-b) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \uparrow (-a) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad}_{I_3} \quad \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Ekstraoppgaver

Oppgave 5

La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Kan du finne et tall c og en vektor $\mathbf{v}$ (som ikke skal være nullvektoren) slik at $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$?
- I så fall, for hvilke valg av c eksisterer en slik ikke-null vektor?
- Kan du gi en geometrisk forklaring på hva som skjer når du multipliserer A med vektorene i de ulike tilfellene for c ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Måh: Finne $\vec{v}$ og c s.a. $A\vec{v} = c\vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a, b \text{ ikke begge } 0. \quad A_{2 \times 2} \cdot \vec{v}_{2 \times 1}$$

Merk at a og b ikke begge kan være 0 samtidig ettersom $\mathbf{v}$ ikke kan være en nullvektor (jmf. oppgaveteksten).

Vi regner ut høyre- og venstresiden av likningen hver for seg:

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c\vec{v} = c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix}$$

Vi setter inn i likningen for $A\vec{v}$ og $c\vec{v}$ og undersøker hva c kan være:

$$A\vec{v} = c\vec{v} : \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = ca \\ 0 = cb \end{cases}$$

Likningene kan være oppfylt på to måter, for $c = 0$ og $c = 1$:

$$\begin{cases} c=1 \\ c=0 \end{cases}$$

- I. Hvis $a \neq 0$ kan vi dele første likning på a og finne at $c = 1$. Da kan a velges vilkårlig (foruten 0). For at andre likning også skal være oppfylt må $b = 0$.

$$c=1: a \text{ vilkårlig}, b=0$$

II.

- III. Dersom $a = 0$ kan vi ikke dele på a . Da må $b \neq 0$ ($\vec{v}$ kan ikke være nullvektoren). For at andre likning skal være oppfylt må $c = 0$.

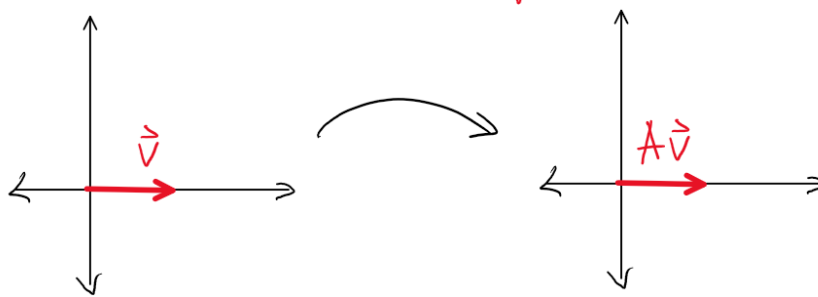
$$c=0: a=0, b \text{ vilkårlig}$$

Altså,

$$c=1: \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{1}_{c \cdot \vec{v}} \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

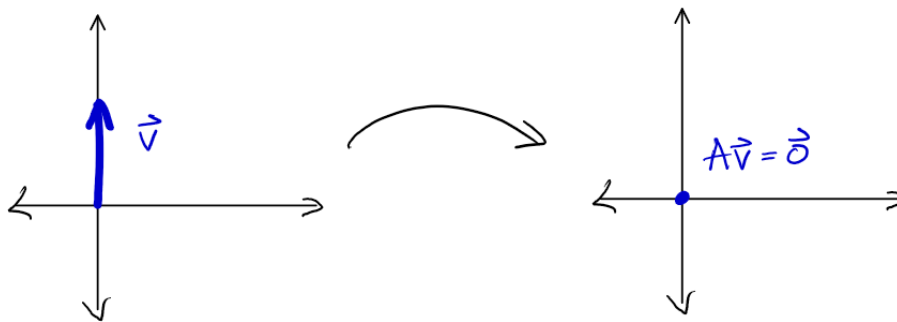
Geometrisk: Vektor langs x-aksen bevares
v. multipliseres m. A



$$c=0: \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \overbrace{0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}}^{c\vec{v}}$$

Geometri: Vektor langs y-akse sendes til $\vec{0}$
v. multiplikasjon m. A



Denne oppgaven fungerer som en forsmak på kapittel 9 hvor vi skal lære om egenverdier og egenvektorer.