

Plenumsregning 4: Lineær uavhengighet og determinanter

Kapittel 5: Lineær uavhengighet

Oppgave 1

a) Sjekk at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Definisjon

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er **lineært uavhengige** dersom $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

M.a.o. en mengde vektorer er lineært uavhengige av hverandre dersom den **eneste** måten en lineærkombinasjon av dem kan bli lik null-vektoren på er dersom **alle** koeffisientene er null.

Pr def: $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lin.-uavh. hvis $c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$

Vi sjekker om det finnes andre koeffisienter enn 0 som gjør at en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ kan bli nullvektoren:

$$c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v} = \vec{0}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 18 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvis vi løser dette likningssystemet ved Gauss-eliminering, vil vi se at den eneste løsningen er dersom $c_1 = c_2 = 0$:

Gauss $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$
 ENESTE MULIGHET

M.a.o., den eneste løsningen av det homogene likningssystemet er den trivielle.

Når vi blir lei av Gauss-eliminering, kan vi istedenfor benytte oss av et resultat fra kapittelnotatene:

ALTERNATIV

Teorem 5.6

To vektorer, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, er lineært uavhengige $\Leftrightarrow \mathbf{u} \neq c\mathbf{v}$, $c \neq 0$ skalar.

M.a.o. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lin. uavh. $\Leftrightarrow \vec{u} = c\vec{v}$ for $c \neq 0$

Dermed blir vår oppgave å avgjøre om $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er skalarmultipler av hverandre:

$\exists c \neq 0$ skalar s.a. $\vec{u} = c\vec{v}$?

Vi sjekker:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 4c = 1 \rightarrow c = 1/4 \\ 18c = 5 \rightarrow c = 5/18 \\ 4c = -3 \rightarrow c = -3/4 \end{cases} \quad \text{UMULIG}$$

Svar: $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lin. uavh. ettersom de IKKE er skalarmultipler av hverandre

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{w}$ som sammen med vektorene i a) er lineært uavhengige.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = ?$$

MÅL: Finne $\vec{w}$ s.a. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lin. uavh.

Fra definisjonen av lineær uavhengighet vet vi at $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis den eneste måten vi kan få en lineærkombinasjon av dem til å bli lik $\mathbf{0}$ er hvis alle koeffisientene er 0.

$$\Leftrightarrow c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v} + c_3 \vec{w} = \vec{0}$$

m. $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ENESTE MULIGHET

Teorem 5.13

Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Hvis en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, så er vektorene lineært avhengige.

Vår strategi blir derfor tilsvarende som i forrige uke. Først skal vi lage en vektor $\mathbf{x}$ som ER en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ (og dermed lineært avhengig av dem). Deretter skal vi endre én komponent i $\mathbf{x}$ for å lage en ny vektor $\mathbf{w}$ som IKKE er en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Dermed vil $\mathbf{w}$ heller ikke være lineært avhengig av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Altså vil mengden $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ være lineært uavhengige vektorer.

Strategi

- 1) Lage en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ som ER en lin.komb. (og dermed lin.avh.) av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
- 2) Endre én komponent i $\mathbf{x}$ for å lage en ny vektor $\mathbf{w}$ som er lin.uavh. av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
- 3) Verifisere.

$$\textcircled{1} \quad \vec{x} = c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da $c_1 = c_2 = 1$

$$\textcircled{2} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \nexists d_1, d_2 \text{ s.a. } d_1 \vec{u} + d_2 \vec{v} = \vec{w}$$

$$\text{Løs } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 18 & 23 \\ -3 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\leftarrow (-5) \\ \leftarrow 3}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 16 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{\leftarrow 8} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 0 \neq -1 \end{matrix}$$

Likningssystemet er inkonsistent
 $\Rightarrow \nexists d_1, d_2 \text{ s.a. } \vec{w} = d_1 \vec{u} + d_2 \vec{v}$

Sammen med a) kan vi da konkludere med at vektorene er lin.uavh.

Vi ser at det er en klar sammenheng mellom
 hvorvidt vektorer er lineærkombinasjoner av
 hverandre, og hvorvidt de er lin.uavh.

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ lin. uavh.}$$

c) Vis at $\mathbf{w}$ og vektorene i a) til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Vi vise: $\text{span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^3$

Definisjon

Spennet av en mengde vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorene:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \text{ skalarer}\}$$

Vi skal bruke et resultat fra kapittelnotatene:

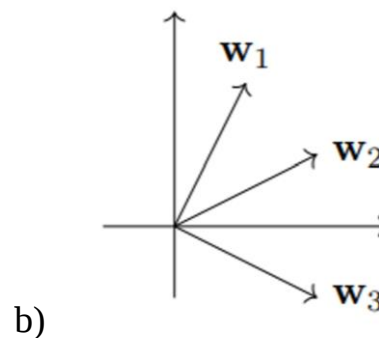
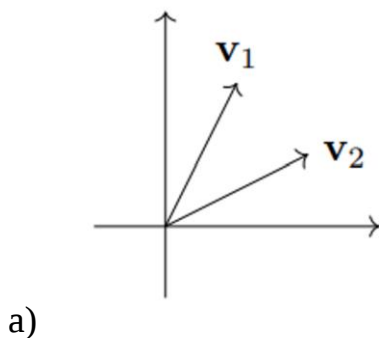
Teorem 5.15

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \text{ er lineært uavhengige} \Leftrightarrow \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n$$

Siden $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ er 3 lin. uavh. vektorer i $\mathbb{R}^3$ må de, i fgl. Teorem 5.14, spenne ut $\mathbb{R}^3$

Oppgave 4

De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.



I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

Se på figuren i a) med $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ først. Vi husker at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er **lineært avhengige dersom** de kan skrives som lineærkombinasjoner av hverandre. M.a.o. $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er **lineært avhengige** dersom vi kan skrive $\mathbf{v}_1$ som en skalarmultiplum av $\mathbf{v}_2$. Men i så fall skulle $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ligge på samme linje (hvilket de ikke gjør). Dermed må de være **lineært uavhengige**.

a) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. uavh. ettersom $\vec{v}_1 \neq c \vec{v}_2$

I tillegg har vi Teorem 5.14, som sier at to lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^2$ vil spenne ut $\mathbb{R}^2$:

$$\text{2 lin. uavh. vektorer i } \mathbb{R}^2 \xRightarrow{\text{Thm 5.14}} \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \mathbb{R}^2$$

Nå ser vi på figuren i b) med w_1, w_2 og w_3 . Her har vi 3 vektorer i $\mathbb{R}^2$, så de må være **lineært avhengige**. Husk: Vi kan maksimalt ha n **lineært uavhengige** vektorer i $\mathbb{R}^n$.

b) $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ er **lin. avh.** ettersom vi max kan ha 2 lin. uavh. vektorer i $\mathbb{R}^2$

Vi legger merke til at w_1 og w_2 ikke er skalarmultipler. Dermed utgjør dette paret av vektorer to lin. uavh. vektorer som spenner ut $\mathbb{R}^2$.

$$\text{2 av vektorene er lin. uavh. } \xRightarrow{\text{Thm 5.14}} \text{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} = \mathbb{R}^2$$

Oppgave 5

Er vektorene lineært uavhengige?

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 2i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5-3i \\ 10+2i \\ 4+6i \end{bmatrix}$$

$$\text{La } \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2i \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} i \\ 2i \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 5-3i \\ 10+2i \\ 4+6i \end{bmatrix}$$

For å avgjøre om disse er lineært uavhengige skal vi benytte oss av nok et teorem fra kapittelnotatene:

Teorem 5.8

Kolonnene i A er lineært uavhengige $\Leftrightarrow Ax = \mathbf{0}$ kun har triviell løsning ($x = \mathbf{0}$).

$$\underbrace{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ lin. uavh.}}_{\text{Påstand A}} \Leftrightarrow \underbrace{(Ax = \vec{0} \Leftrightarrow x = \vec{0}, A = [\vec{u} | \vec{v} | \vec{w}])}_{\text{Påstand B}}$$

Vi løser det homogene likningssystemet for å finne ut om den eneste løsningen er den trivielle:

$$\text{Er } A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 0 \\ 4 & 2i & 10+2i & 0 \\ 2i & -1 & 4+6i & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-2)} \xrightarrow{(-i)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 0 \\ 0 & 0 & 8i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot (1/2) \\ (-i/8) \end{array}$$

Mellomregning: $(5-3i)(-i) + (4+6i) = -5i + \underbrace{3i^2}_{-3} + 4 + 6i = \underline{i+1}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i/2 & \frac{5-i}{2} - \frac{3i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{5-i}{2} + \frac{3i}{2}} \xrightarrow{(-1-i)} \quad 1+i + (-1-i) = 0$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{cases} x_1 + \frac{i}{2}x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-i}{2} \cdot 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Svar: Etttersom $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ s.a. $A\vec{x} = \vec{0}$, gir **Thm 5.8** at $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ er lin. avh.

Kapittel 6: Determinanter

Oppgave 1

Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige.

Vi kaller matrisen A og regner ut determinanten. Først, vi vet at determinanten til en 2×2 -matrise regnes ut slik:

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Nå skal vi altså regne ut determinanten til en 3×3 -matrise. Vi kan velge å utvikle langs en hvilken som helst rad/kolonne. Typisk velger vi en rad/kolonne med mange nuller fordi det reduserer antall utregninger vi må gjøre.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-2) - 2(-1) - (1(-2) - 2 \cdot 3) + 0 \\ &= \cancel{-4} + \cancel{2} + \cancel{2} + 6 = 6 \neq 0 \end{aligned}$$

For å avgjøre om kolonnene er lineært uavhengige bruker vi følgende teorem:

Teorem 6.12

A $n \times n$ -matrise:

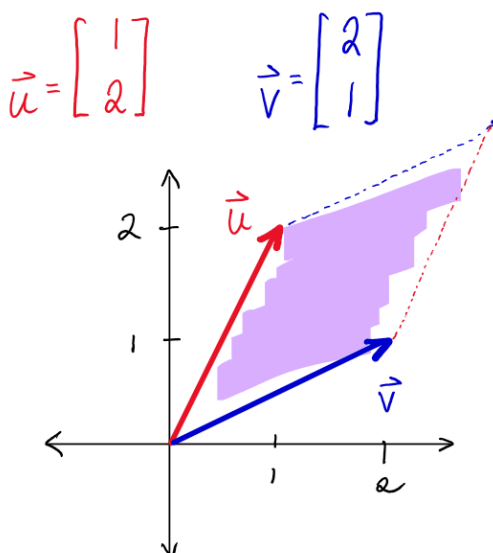
$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{kolonnene til } A \text{ er lineært uavhengige.}$$

Svar: Ettersom $\det(A) \neq 0$ vet vi vha. **Thm 6.12** at kolonnene til A er lin. uavh.

Oppgave 6

Skisser parallelogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



Oppgaven er hentet fra et tidligere oppgavesett.

Det lille området viser parallelogrammet som vektorene spenner ut. Nå lager vi oss en matrise A med vektorene u og v som kolonnevektorer.

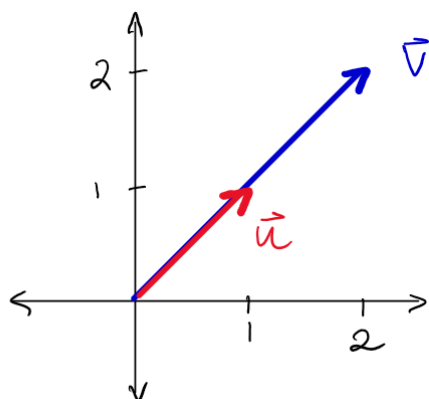
$$\begin{aligned} \text{La } A &= [\vec{u} \mid \vec{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \det(A) &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \end{aligned}$$

Determinanter har en geometrisk tolkning – Determinanten til matrisen er arealet av parallelogrammet utspent av kolonnevektorene. Altså kan vi finne arealet ved å regne ut determinanten til A . Areal er positivt, så derfor tar vi absoluttverdien ved negative determinanter:

$$A_{\square} = |\det(A)| = |-3| = \underline{\underline{3}}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b) \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Areal $_{\square} = 0$ fordi $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ligger på samme linje.

Oppgave 7

La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}$$

Oppgaven er hentet fra et tidligere oppgavesett.

a) Finn $\det(A)$ uttrykt ved a, b, c og x, y, z .

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -c \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = -c(b(0 \cdot z - xy)) - 0 + 0 = \underline{\underline{bcxy}}$$

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?

Teorem 6.12

A $n \times n$ -matrise:

A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} A \text{ inverterbar} &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow bcxy \neq 0 \\ &\Leftrightarrow b, c, x, y \neq 0 \end{aligned}$$

Eksamen kont 2023

Oppgave 5

Anta at $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige vektorer. Vis at de tre vektorene

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \text{ og } \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

også er lineært uavhengige.

Vet: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lin. uavh.

Vil vise: $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}$ lin. uavh.

Vi starter beviset vårt med å ta utgangspunkt i definisjonen av lineær uavhengighet (denne må vi kunne utenat!):

$$\begin{aligned} \text{Pr def: } &\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \text{ lin. uavh.} \\ \Leftrightarrow &c_1(\vec{u} + \vec{v}) + c_2(\vec{u} + \vec{w}) + c_3(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \end{aligned}$$

Vi må altså sjekke om denne lineærkombinasjonen medfører at alle koeffisientene må være 0.

Nok å vise: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Vi regner ut parentesene (blå markering) og stikker om på leddene før vi faktoreriserer på nytt:

$$\begin{aligned} &\underline{c_1 \vec{u}} + \underline{c_1 \vec{v}} + \underline{c_2 \vec{u}} + \underline{c_2 \vec{w}} + \underline{c_3 \vec{v}} + \underline{c_3 \vec{w}} = \vec{0} \\ &\underbrace{(c_1 + c_2)}_{=0} \vec{u} + \underbrace{(c_1 + c_3)}_{=0} \vec{v} + \underbrace{(c_2 + c_3)}_{=0} \vec{w} = \vec{0} \end{aligned}$$

Vi vet at $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lin. uavh. (dette står i oppgaveteksten), så koeffisientene $(c_1 + c_2)$, $(c_1 + c_3)$ og $(c_2 + c_3)$, må alle være 0 for at lin.komb. skal bli $\mathbf{0}$.

Altså, siden $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ er lin. uavh. må

$$\begin{array}{l} \text{I)} \quad c_1 + c_2 = 0 \\ \text{II)} \quad c_1 + c_3 = 0 \\ \text{III)} \quad c_2 + c_3 = 0 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad \Rightarrow \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \text{ er lin. uavh.} \quad \square$$

Eksamen høst 2018

Oppgave 2

Se på følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$?

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

For å avgjøre om $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige kan vi benytte oss av (deler av) følgende teorem:

Teorem 6.12 (forkortet)

A $n \times n$ -matrise:

Kolonnene i A er lineært uavhengige $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ lin. uavh.} \Leftrightarrow \det(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 3(2 \cdot 8 - (-1) \cdot 4) - (-2)(-3 \cdot 8 - (-1)(-6)) + 1(-3 \cdot 4 - 2(-6)) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ er lin. avh.}$$

Så til neste del, er $\vec{b}$ en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$?

$$\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \text{ s.a. } \vec{b} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & -9 \\ -6 & 4 & 8 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 29/30 \\ 0 & 1 & 0 & 11/10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \nearrow \text{Selvmotsigelse} \\ 0 \neq -5 \end{array}$$

Her har vi en motsigelse. Altså finnes det ikke koeffisienter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ s.a. $\vec{b}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av vektorene:

Svar: $\vec{b}$ er IKKE en lin.komb. av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Oppsummering:

For A $n \times n$ -matrise er følgende påstander ekvivalente:

- a) Kolonnene i A er lineært uavhengige.
- b) Kolonnene til A spanner ut $\mathbb{R}^n$.
- c) $\det(A) \neq 0$.
- d) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har triviell løsning ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Merk:

I plenumsregning ser vi på *noen* løsningsmetoder. Det finnes ofte flere måter å komme frem til riktig løsning, men vi kommer ikke til å dekke alle mulige strategier. Valget av strategi avhenger av konteksten, og i mange tilfeller er det ikke én enkelt metode som utpeker seg som «best».