

Plenumsregning 5: Vektorrom

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Svar med begrunnelse på følgende spørsmål:

- b) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$ av likningen

$$x - y + z = 0$$

et underrom av $\mathbb{C}^3$?

Altså, i denne oppgaven skal vi sjekke om mengden av alle komplekse, 3-dimensjonale vektorer hvor $x - y + z = 0$ danner et underrom av $\mathbb{C}^3$. Vi begynner med å skrive opp mengden, og vi kan kalle den S :

$$\text{La } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

S er altså mengden av vektorer (x, y, z) hvor $x - y + z = 0$. Først må vi ha klart for oss hva vektorrom og underrom er:

Definisjon

V mengde. To operasjoner:

- I. Addisjon av vektorer: $u + v$
- II. Skalarmultiplikasjon: cu

For at V skal være et **vektorrom**, må V være:

- Lukket under addisjon
- Lukket under skalarmultiplikasjon

I tillegg må vektoraksiomene (V1-V8) være oppfylt.

Definisjon

Et **underrom** U av et vektorrom V er en *delmengde* $U \subseteq V$ som i seg selv utgjør et vektorrom, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i V .

Det finnes et teorem som effektivt lar oss undersøke om en mengde er et underrom av et gitt vektorrom:

Teorem 7.9

For $U \subseteq V$, U er et *underrom* av V dersom

- 1) Nullvektoren i V ligger i U
- 2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in U \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ (lukket under addisjon)
- 3) $c\mathbf{u} \in U \quad \forall \mathbf{u} \in U, c \text{ skalar}$ (lukket under skalarmultiplikasjon)

Her: $V = \mathbb{C}^3, U = S$

Vi sjekker nå betingelsene 1-3 for mengden S . Vi undersøker først om nullvektoren i $\mathbb{C}^3$ er inneholdt i S :

① $\vec{0}_V = \overset{x}{(0, \overset{y}{0}, \overset{z}{0})} \in S?$

Nok å vise: $x - y + z = 0$ for $x = y = z = 0$
 $0 - 0 + 0 = 0$
 $\Rightarrow \underline{\vec{0}_V \in S}$

Deretter undersøker vi om S er lukket under addisjon:

② Er $(\vec{u} + \vec{v}) \in S \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in S?$

La $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in S \Rightarrow u_1 - u_2 + u_3 = 0$
 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in S \Rightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (\underbrace{u_1 + v_1}_x, \underbrace{u_2 + v_2}_y, \underbrace{u_3 + v_3}_z)$

For å finne ut om $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ også er i S må vi sjekke om denne vektoren oppfyller betingelsene for å være i S . Så, for disse verdiene av x, y, z , er $x - y + z = 0$?

$x - y + z \stackrel{?}{=} 0$

Vi setter inn for x, y, z og sjekker:

$(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3)$

Vi løser opp parentesene og flytter litt rundt på leddene:

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{u_1 - u_2 + u_3}_{=0} + \underbrace{v_1 - v_2 + v_3}_{=0} = 0 \\
 &\quad \text{fordi } \vec{u} \in S \quad \text{fordi } \vec{v} \in S \\
 &\Rightarrow \underline{(\vec{u} + \vec{v}) \in S}
 \end{aligned}$$

Dermed er S lukket under addisjon.

Nå, er S lukket under skalarmultiplikasjon?

$$\textcircled{2} \text{ Er } c\vec{u} \in S \quad \forall \vec{u} \in S, c \in \mathbb{C}?$$

Vi lar $\vec{u}$ være en vektor i S . Da vet vi at $u_1 - u_2 + u_3 = 0$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in S \Rightarrow u_1 - u_2 + u_3 = 0$$

$c \in \mathbb{C}$

$c\vec{u}$ blir da:

$$c\vec{u} = c(u_1, u_2, u_3) = (\underbrace{cu_1}_x, \underbrace{cu_2}_y, \underbrace{cu_3}_z)$$

Vi sjekker om $c\vec{u}$ er med i S :

$$\begin{aligned}
 &x - y + z = 0? \\
 &cu_1 - cu_2 + cu_3 \\
 &= \underbrace{(u_1 - u_2 + u_3)}_{=0} = 0 \\
 &\quad \text{fordi } \vec{u} \in S
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{c\vec{u} \in S}$$

Ettersom betingelsene (1)-(3) er oppfylt, kan vi konkludere med at S er et underrom av $\mathbb{C}^3$.

Svar: S er et underrom av $\mathbb{C}^3$ fordi betingelsene $\textcircled{1}$ - $\textcircled{3}$ er oppfylt.

Merk: Vi skiller mellom reelle og komplekse vektorrom. F.eks. kan vi betrakte $\mathbb{C}^3$ som reelt og komplekst. Les mer om dette i kapittelnotatene. Relevante oppgaver: Oppgave 1 d) og e) fra ekstraoppgavene.

c) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$ av likningen
 $x - y + z = 1$
 et underrom av $\mathbb{C}^3$?

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + z = 1\}$, $V = \mathbb{C}^3$
 Er W et underrom av $\mathbb{C}^3$?

① Er $\vec{0}_V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$?

$\hookrightarrow$ Er $x - y + z = 1$ for $x = y = z = 0$?

$$0 - 0 + 0 = 0 \neq 1$$

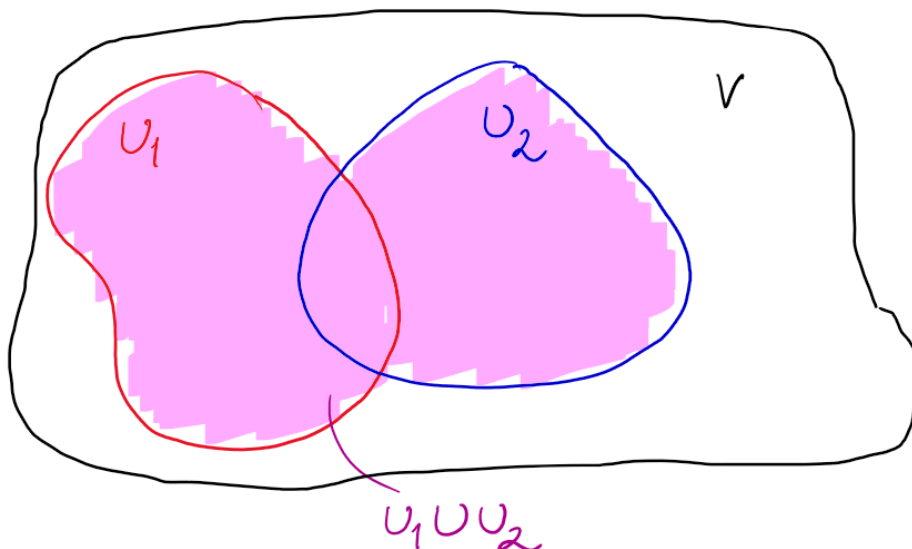
$$\Rightarrow \underline{\vec{0}_V \notin W}$$

Svar: W er IKKE et underrom av $\mathbb{C}^3$ fordi $\vec{0}_V \notin W$

Oppgave 2

La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V . Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V .



$$U_1 \cup U_2 = \{ \vec{u} \in V \mid \vec{u} \in U_1 \text{ og/eller } \vec{u} \in U_2 \}$$

Er $U_1 \cup U_2$ et underrom av V ?

NEI. Vi viser ved MOTEKSEMPEL.

Merk:

- For å vise at en påstand stemmer, må vi vise at den holder for alle mulige tilfeller.
- For å vise at en påstand IKKE stemmer, er det nok å finne ett moteksempel.

$$\text{La } \begin{cases} V = \mathbb{R}^2 \\ U_1 = \{ \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 = 0 \} \text{ "x-aksen"} \\ U_2 = \{ \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 0 \} \text{ "y-aksen"} \end{cases}$$

Igjen bruker vi **Teorem 7.9** og sjekker betingelsene:

① Er $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U_1 \cup U_2$?

Ja, fordi $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U_1$ (og forøvrigt U_2)

② Er $(\vec{u} + \vec{v}) \in U_1 \cup U_2 \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$?

NEI Ex: $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in U_1$
 $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U_2$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin U_1 \cup U_2 \quad \times$$

Svar: $U_1 \cup U_2$ er IKKE et underrom av V ettersom mengden ikke er lukket under addisjon

Oppgave 7

La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektoraksiomene.

aksiomer for addisjon	{	(V1) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. (Vektoraddisjon er en <i>assosiativ</i> operasjon.) (V2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. (Vektoraddisjon er en <i>kommutativ</i> operasjon.) (V3) Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$. (Vektoraddisjon har et <i>identitetselement</i>.) (V4) For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes en vektor $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. (Vektoraddisjon har <i>inverser</i> for alle elementer.)
aksiomer for skalar- multi- plikasjon	{	(V5) $(ab) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og alle skalarer a og b. (Skalarmultiplikasjon er <i>kompatibel</i> med multiplikasjon av skalarer.) (V6) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$. (Tallet 1 er <i>identitetselement</i> for skalarmultiplikasjon.) (V7) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og alle skalarer a. (Skalarmultiplikasjon er <i>distributiv</i> over addisjon av vektorer.) (V8) $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, og alle skalarer a og b. (Skalarmultiplikasjon er <i>distributiv</i> over addisjon av skalarer.)

b) Hvis $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ for tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$ i V , så følger det at $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

I denne oppgaven har vi et vektorrom V , og en påstand. Vi skal vise at påstanden følger fra vektoraksiomene. Det innebærer på et vis at vi later som om vi *ikke* kan ting vi har kunnet i årevis.

Vet: V vektorrom
 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

Vil vise: $\vec{v} = \vec{w}$

Beweis:

$$\text{Se p\AA} \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

Vi bruker **V2** på begge sider - addisjon er *kommutativt*. Dvs $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{w} + \vec{u} \quad \text{V2}$$

Fra **V4** vet vi at $\mathbf{u}$ har en additiv invers $-\mathbf{u}$. Vi legger til $-\mathbf{u}$ på begge sider av likheten:

$$(\vec{v} + \vec{u}) + (-\vec{u}) = (\vec{w} + \vec{u}) + (-\vec{u}) \quad \text{V4}$$

Så bruker vi **V1** på begge sider. Altså at vektoraddisjon er assosiativt - vi kan sette parenteser der vi vil.

$$\vec{v} + (\vec{u} + (-\vec{u})) = \vec{w} + (\vec{u} + (-\vec{u})) \quad \text{V1}$$

Nå bruker vi **V4** igjen. At $\mathbf{u} +$ inversen $-\mathbf{u}$ er $\mathbf{0}$:

$$\vec{v} \quad \underbrace{\vec{u} + (-\vec{u})}_{\vec{0}} = \vec{w} \quad \underbrace{\vec{u} + (-\vec{u})}_{\vec{0}} \quad \text{V4}$$

Til slutt bruker vi **V3**, at det finnes et nullelement, så $\mathbf{v} + \mathbf{0}$ er $\mathbf{v}$.

$$\vec{v} = \vec{w} \quad \text{V3} \quad \square$$

Oppgave 10

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

$$\mathcal{P}_2 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{P}_2$ er altså mengden av polynomer med grad 2 eller lavere. Merk at i utgangspunktet kan koeffisientene være både reelle og komplekse, men la oss jobbe med reelle tall nå.

Vi foreslår en basis, og så sjekker vi at forslaget vårt faktisk oppfyller kravene for å være en basis. Vi kan f.eks. velge $(1, x, x^2)$.

$$\text{Gjett: } \beta = (1, x, x^2)$$

Definisjon

En **basis** for et vektorrom V er en mengde

$$B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

vektorer i V som oppfyller følgende betingelser:

- 1) Vektorene spenner ut V , dvs. $\text{Sp}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} = V$.
- 2) Vektorene er lineært uavhengige, dvs. $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ for c_i skalarer.

① Er $\text{Sp}\{1, x, x^2\} = \mathcal{P}_2$?

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{1, x, x^2\} &= a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \\ &= \underline{\mathcal{P}_2} \end{aligned}$$

② Er $1, x, x^2$ lin. uavh.?

$$\text{Ja, for da } a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

① + ② $\Rightarrow (1, x, x^2)$ er en basis for $\mathcal{P}_2$

I dette tilfellet valgte vi basisen $(1, x, x^2)$ fordi dette er kanskje den enkleste basisen vi kunne gjettet. Det finnes likevel uendelige mange basiser vi kunne ha gjettet. Ta f.eks:

Alt: $\beta = (1, x-1, (x-1)^2)$ (S. en selv)

b) Hva er koordinatene til polynomet $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

$$[p(x) = 1 + 2x + 3x^2]_{\beta} = ?$$

Nå er vi ute etter de koeffisientene som lar oss uttrykke polynomet som en lineærkombinasjon av basisvektorene, altså:

↳ "Hva må a, b, c være for at $a \cdot 1 + b \cdot x + c x^2 = 1 + 2x + 3x^2$?"

I dette tilfellet kan vi se løsningen direkte:

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c x^2 = 1 + 2x + 3x^2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [1 + 2x + 3x^2]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eksamen Kont 2019

Oppgave 2

La A være en reell $m \times n$ -matrise.

- a) Skriv ned definisjonen på nullrommet til A . Vis at nullrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$. Her:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow n = 3, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$$

Definisjon

Nullrommet til en reell $m \times n$ -matrise A er løsningsmengden til likningen $Ax = \mathbf{0}$, altså delmengden:

$$\text{Null } A = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \mathbf{0}\}$$

av $\mathbb{R}^n$.

Nullrommet til matrisen er altså følgende mengde:

$$\text{Null } A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{x} = \vec{0} \}$$

Altså nullrommet til A er den mengden som består av alle vektorer som er løsningen av det homogene likningssystemet. Dvs, alle vektorer x som oppfyller $Ax = \mathbf{0}$. Deretter skal vi vise at nullrommet til A er et underrom av $\mathbb{R}^n$ vha. **Teorem 7.9**:

$$\textcircled{1} \text{ Er } \vec{0}_{\mathbb{R}^3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 ?$$

$$\hookrightarrow \text{Er } A\vec{x} = \vec{0} \text{ for } \vec{x} = \vec{0} ?$$

Ja, dette er den trivielle løsningen

Dette sjekkes ved å utføre matrisemultiplikasjonen:

$$\text{Sjekk: } A\vec{0} = \vec{0}$$

Videre sjekker vi om nullrommet er lukket under addisjon:

$$\textcircled{2} \text{ Er } (\vec{u} + \vec{v}) \in \text{Null } A \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \text{Null } A$$

$$\hookrightarrow \text{Er } A(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0} ?$$

$$\begin{aligned} A(\vec{u} + \vec{v}) &\stackrel{\text{distributiv}}{=} A\vec{u} + A\vec{v} \\ &= \underbrace{\vec{0}} + \underbrace{\vec{0}} = \underline{\underline{\vec{0}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(\vec{u} + \vec{v}) \in \text{Null } A}}$$

Og til slutt, er nullrommet lukket under skalarmultiplikasjon?

③ Er $\vec{u} \in \text{Null } A \quad \forall \vec{u} \in \text{Null } A, c \in \mathbb{R}$?
 $\hookrightarrow A(c\vec{u}) = \vec{0}$?

$$A(c\vec{u}) = c \underbrace{A\vec{u}}_{\vec{0} \text{ fordi } \vec{u} \in \text{Null } A} = c\vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{A(c\vec{u}) = \vec{0}}$$

Svar: ①-③ viser at $\text{Null } A$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$

b) Ligger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I nullrommet til A ? Finn en basis for $\text{Col } A$ og en basis for $\text{Null } A$. Bestem dimensjonen på disse underrommene.

$$\text{La } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I denne deloppgaven er det bakt inn mange små oppgaver, så vi lager en oversikt og bruker denne som en sjekkliste:

Gjøreliste:

1. $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Null } A$
2. Basis for $\text{Col } A$
3. Basis for $\text{Null } A$
4. $\dim \text{Col } A$
5. $\dim \text{Null } A$

Først, er $\vec{u}$ med i $\text{Null } A$?

① $\vec{u} \in \text{Null } A$?
 $\hookrightarrow A\vec{u} = \vec{0}$?

Vi sjekker:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -19 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \notin \text{Null } A$$

Altså, $\vec{u}$ er IKKE med i Null A .

Er $\vec{v}$ med i Null A , da?

ii) $\vec{v} \in \text{Null } A$?

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \in \text{Null } A$$

② Col A = ?

Før vi finner en basis for kolonnerommet (og nullrommet) minner vi oss selv på hva kolonnerommet er:

Definisjon

Kolonnerommet til en reell $m \times n$ -matrise

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$$

er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A :

$$\text{Col } A = \text{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

Vi har en oppskrift for hvordan vi kan finne kolonnerommet, Col A :

Fremgangsmåte:

- i. Gauss-eliminer A .
- ii. Finn pivotelementer.
- iii. Kolonnene i $\underline{A}$ som har ledende enere i den reduserte formen danner en basis for Col A .

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Col } A = \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi skal finne dimensjonen til kolonnerommet:

Definisjon

V endeligdimensjonalt vektorrom. Vi definerer **dimensjonen** til V , $\dim V$, som antall vektorer i en basis for V . Hvis β er en basis for V har vi altså

$$\dim V = |\beta|.$$

Siden det er 2 elementer i basisen for kolonnerommet til A , så har dette underrommet dimensjon 2:

$$\textcircled{4} \dim \text{Col } A = \underline{2} \quad (\text{rank}(A))$$

Merk: Dimensjonen til kolonnerommet til A , $\dim \text{Col } A$, kalles også for rangen til matrisen. Vi kan altså skrive at $\dim \text{Col } A = \text{rank } A$.

Deretter finner vi dimensjonen til nullrommet vha. et resultat fra forelesningsnotatene:

Teorem 7.27

La A være en $m \times n$ -matrise. Da er

$$\dim \text{Null } A + \text{rank } A = n$$

$$\textcircled{5} \dim \text{Null } A + \text{rank } A = n$$

$$\dim \text{Null } A = \underset{\substack{\uparrow \\ \# \text{ kolonner} \\ \text{ i } A}}{n} - \text{rank } A = 3 - 2 = \underline{1}$$

Siden $\dim \text{Null } A$ er 1, vet vi at det vil være ett element i en basis for nullrommet. Vi har sett at $\vec{v}$ er med i $\text{Null } A$, altså kan denne vektoren danne en basis for $\text{Null } A$:

$$\textcircled{3} \text{ Null } A = \text{Sp}\{\vec{v}\} = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Merk: Dette er bare én mulig basis for nullrommet. Faktisk vil alle skalarmultipler av denne vektoren kunne danne en basis, altså har vi et uendelig antall mulige basiser for nullrommet til A .

Oppgave 12

La A være en $m \times n$ -matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim \text{Col } A > 0$

a) $A_{m \times n} \quad m < n \quad \dim \text{Col } A > 0?$

NEI! ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ingen pivotelementer $\Rightarrow \dim \text{Col } A = \underline{0}$

b) $\dim \text{Null } A > 0$

b) Er $\dim \text{Null } A > 0$ når $A_{m \times n}, m < n$?

$m < n \Rightarrow \# \text{ kolonner} > \# \text{ rader}$

"Bred matrise" $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

Vi kan tenke oss matrisen A som en tuppel med kolonnevektorer:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Ettersom antall rader er mindre enn antall kolonner må kolonnevektorene være lineært avhengige (Husk: 3 vektorer i $\mathbb{R}^2$ må være lin.avh.)

$m < n \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lin. avh.

Dette betyr at det finnes koeffisienter der ikke alle er 0 som gjør at vi kan få en lineærkombinasjon av kolonnevektorene til å bli $\mathbf{0}$:

$$\Rightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_n \text{ ikke alle } 0 \text{ s.a.}$$

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Altså, det finnes ikke-trivielle løsninger av det homogene likningssystemet:

$$\Rightarrow \exists \vec{c} \neq \vec{0} \text{ s.a. } A\vec{c} = \vec{0}$$

Disse ikke-trivielle løsningene er elementer i $\text{Null } A$:

$$\Rightarrow \vec{c} \in \text{Null } A$$

Og siden nullrommet ikke er tomt så vil dimensjonen være større enn 0:

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dim \text{Null } A > 0}}$$