

Plenumsregning 6:

Lineærtransformasjoner

Innlevering 2

Oppgave 4

La

$$B = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 3i \\ 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 2i & 1-i \end{bmatrix}$$

a) Finn B^{-1} ved gausseliminering.

$$B = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 3i \\ 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 2i & 1-i \end{bmatrix} \quad B^{-1} = ?$$

Sette opp matriselikningen og utføre Gauss-Jordan-eliminering:

$$[B | I_3] \sim [I_3 | B^{-1}]$$

Begynner med å stokke om på likningene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1+2i & 0 & 3i & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2i & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \\ \end{matrix}$$

Prøver deretter å få reelle tall der vi siden vil eliminere:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2i & 1-i & 0 & 0 & 1 \\ 1+2i & 0 & 3i & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \cdot (-i) \\ \cdot 2 \\ \end{matrix}$$

$2i \cdot (-i) = -2 \overset{-1}{\cdot} = 2$
 $(1-i)(-i) = i^2 - i = -1 - i$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-i & 0 & 0 & -i \\ 2+4i & 0 & 6i & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot (1-2i) \end{matrix}$$

$\swarrow$ Re

Eliminerer 4-er i rad 3 (element lengst til venstre og nederst):

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-i & 0 & 0 & -i \\ \textcircled{4} & 0 & 3+5i & 2 & 1-2i & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow (-2) \end{array}$$

$\textcircled{4} \rightarrow 0$

Prøver å få reelt tall i siste kolonne i matrisen til venstre:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & \textcircled{1+3i} & 2 & 1-2i & 0 \end{array} \right] \cdot (1-3i)$$

$\textcircled{1+3i} \rightarrow \text{Re}$

Ønsker å få samme reelle del (altså 10) der vi skal eliminere:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & \underline{1+i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 10 & 2-6i & -7+i & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot 10 \\ \cdot 10 \\ \downarrow 0 \end{array}$$

Eliminerer i siste kolonne i matrisen til høyre:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & \textcircled{10+10i} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & \textcircled{-10-10i} & 0 & 0 & -10i \\ 0 & 0 & 10 & 2-6i & -7+i & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \downarrow (-1-i) \\ \downarrow (1+i) \end{array}$$

$\textcircled{10+10i} \rightarrow 0$

Vi ønsker å faktorisere 10 utenfor matrisen og forsøker derfor å få alle pivotelementer lik 10:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \underline{20} & 0 & 0 & 8+4i & 18+6i & 0 \\ 0 & \underline{20} & 0 & 8-4i & -8-6i & -10i \\ 0 & 0 & 10 & 2-6i & -7+i & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot (\frac{1}{2}) \\ \cdot (\frac{1}{2}) \\ \end{array}$$

$\underline{20} \rightarrow 10$

Faktoriserer ved å gange hver likning med $\frac{1}{10}$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{10}{0} & 0 & 0 & 4+2i & 9+3i & 0 \\ 0 & \frac{10}{0} & 0 & 4-2i & -4-3i & -5i \\ 0 & 0 & \frac{10}{0} & 2-6i & -7+i & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Leser av matrisen til høyre som B^{-1} :

$$B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4+2i & 9+3i & 0 \\ 4-2i & -4-3i & -5i \\ 2-6i & -7+i & 0 \end{bmatrix}$$

Oppsummering

- Bytt om på rader for å tilrettelegge for trappeform
- Gjør komplekse elementer til reelle der vi vil eliminere tall
 - Dette gjør det lettere å se hva vi må gange med når vi skal eliminere.
- Unngå brøker. Gjør heller tall større.
- Slow is fast: Mange små steg.

Hensikten med denne oppgaven er todelt: Trene regneferdigheter + øve oss i å legge en god strategi for utregning.

Merk: Denne utregningen illustrerer én strategi, men det er mange mulige veier til mål.

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon mellom reelle vektorrom.

Hvis den er det:

2. Finn standardmatrisen til T
3. Regn ut $\ker(T)$
4. Regn ut $\text{im}(T)$
5. Finn ut om T er **injektiv**

6. Finn ut om T er **surjektiv**

$$a) T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix}$$

$$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix}$$

Definisjon

V, W vektorrom

$T: V \rightarrow W$ er en **lineærtransformasjon** hvis

- I. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
 II. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u} \in V, \forall c$ skalar

For å finne ut om T er en lineærtransformasjon må vi sjekke betingelsene I og II.

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(u_1 + v_1) \\ e^{u_2 + v_2} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{? \parallel}{=} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(u_1) \\ e^{u_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tan(v_1) \\ e^{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(u_1) + \tan(v_1) \\ e^{u_2} + e^{v_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(\vec{u} + \vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \Rightarrow T \text{ er IKKE en lin. trans.}$$

$$b) T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y$$

$$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + y$$

① J lin. trans?

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad J(\vec{u} + \vec{v}) &= J\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = J\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = 2(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 \\ &\stackrel{? \parallel}{=} J(\vec{u}) + J(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = 2u_1 + u_2 + 2v_1 + v_2 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

$$\text{II) } J(\vec{u}) = J\left(c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = J\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}\right) = 2cu_1 + cu_2$$

$$\stackrel{? \parallel}{=} cJ(\vec{u}) = cJ\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = c(2u_1 + u_2) \stackrel{\parallel \text{ } cu}{=} 2cu_1 + cu_2$$

$\Rightarrow J$ lin. trans.

② Std. matrisen til J

Definisjon

Standardmatrisen A til en lineærtransformasjon T er

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \dots \quad T(\mathbf{e}_n)]$$

$$A = \left[T(\vec{e}_1) \mid T(\vec{e}_2) \right]$$

$$T(\mathbf{e}_1) = J\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 1 + 0 = \underline{2}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = J\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 0 + 1 = \underline{1}$$

$$A = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

③ $\ker(J) = ?$

Definisjon

$$T: V \rightarrow W$$

Kjernen til T ($\ker(T)$) er mengden av vektorer $\mathbf{v}$ som sendes til $\mathbf{0}$ av T :

$$\ker(T) = \{ \mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}$$

Vi vet at effekten av transformasjonen på en gitt vektor kan v er det samme som å gange med standardmatrisen til transformasjonen. Dermed har vi at vektorene som utgjør kjernen til transformasjonen er alle løsninger av det homogene likningssystemet. Vi må altså finne disse løsningene:

$$\ker(T) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid T(\vec{v}) = \vec{0} \}$$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \Rightarrow \underline{A\vec{x} = \vec{0}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 = -\frac{v_2}{2}$$

$$v_1 = -\frac{a}{2}$$

fri variabel
 $v_2 = a \in \mathbb{R}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

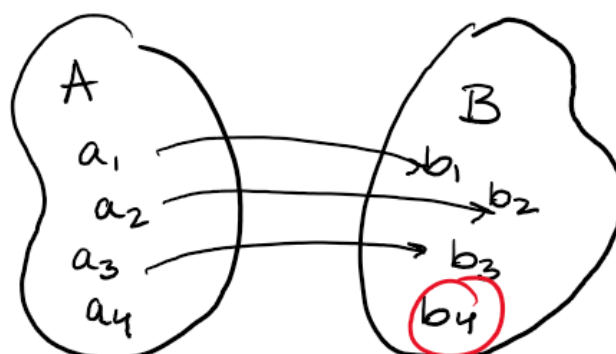
Alle vektorer som spenner ut nullrommet til A (og dermed kjernen til T) vil være på denne formen, men vi trenger bare én slik vektor. Altså kan vi velge en vilkårlig verdi for a :

$$\underline{a = -2} \quad \ker(T) = \underline{\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}$$

⑤ T injektiv?

Definisjon

For en funksjon $f: A \rightarrow B$, har vi at f er **injektiv** (eller **en-til-en**) hvis det $\forall b \in B$ er maksimalt én $a \in A$ s.a. $f(a) = b$.



- En funksjon er altså **injektiv** dersom det for alle elementer i B finnes **maksimalt ett tilhørende element i A** . Legg merke til at det *kan* finnes elementer i B som IKKE treffes av funksjonen.
- Vi sier at funksjonen er **injektiv** dersom forskjellige elementer i A gir forskjellige elementer i B . Med symboler:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow x \neq y \text{ gir } f(x) \neq f(y)$$

Hvis vi derimot kan finne forskjellige verdier i A som svarer til SAMME element i B , så kan vi vise at funksjonen IKKE er **injektiv**. Det er nettopp dette vi skal gjøre – vi skal finne to ulike vektorer u og v som gir samme resultat når vi anvender T :

Strategi: Vi viser T IKKE injektiv ved å finne $\vec{u} \neq \vec{v}$ s.a. $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$

Husk, det er nok å finne ett moteksempel for å vise at noe IKKE stemmer.

$$\text{La } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

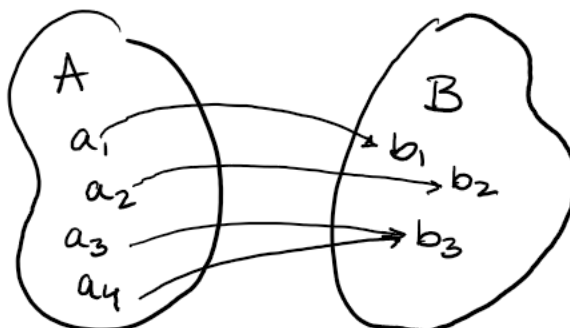
$$\left. \begin{array}{l} T(\vec{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \text{ m. } \vec{u} \neq \vec{v} \\ \Rightarrow T \text{ IKKE injektiv}$$

⑥ T surjektiv?

At en funksjon er **surjektiv**, betyr at alle elementer i kodomenet (B) treffes av funksjonen:

Definisjon

For en funksjon $f: A \rightarrow B$, har vi at f er **surjektiv** (eller **på**) hvis det $\forall b \in B$ finnes en $a \in A$ s.a. $f(a) = b$.



- Legg merke til at et element i B kan ha *flere* tilhørende elementer i A . M.a.o. selv om en funksjon er **surjektiv**, så betyr ikke det nødvendigvis at den er **injektiv**.
- Vi skal også finne bildet til funksjonen, så vi gjør det først og deretter bruker vi sammenhengen mellom bildet og begrepet **surjektiv**.

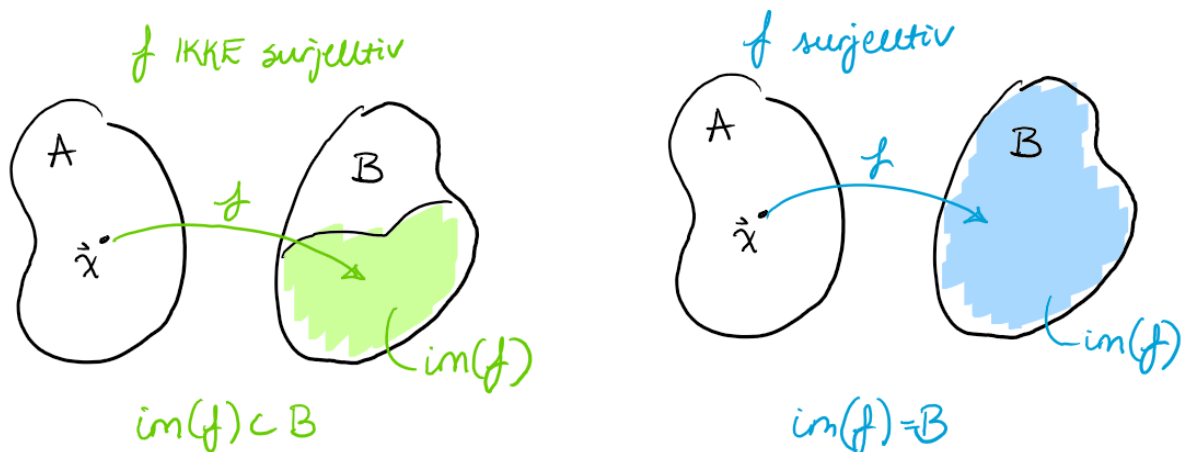
Definisjon

Anta at vi har en funksjon $f: A \rightarrow B$.

Bildet til f ($\text{im}(f)$) er mengden av alle elementer i kodomenet som treffes av funksjonen:

$$\text{im}(f) = \{f(a) | a \in A\}$$

Sagt på en uformell måte: **Bildet** utgjør alt som treffes av funksjonen.



Så bildet kan treffe deler av B eller hele B , avhengig av om funksjonen er **surjektiv** eller ei.

$$\begin{aligned} \text{Her: } T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= 2x + y \end{aligned}$$

Vi vet at T er **surjektiv** hvis og bare hvis **bildet** er lik kodomenet $\mathbb{R}$:

$$T \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \text{im}(T) = \mathbb{R}$$

Hvis vi velger et hvilket som helst element i kodomenet $\mathbb{R}$, kan vi finne en tilhørende vektor $\vec{v}$ i domenet? Med symboler:

$$\text{For } a \in \mathbb{R}, \text{ kan vi finne } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.a. } T(\vec{v}) = a?$$

I så fall er **bildet** til T lik $\mathbb{R}$, og T er **surjektiv**. Ved prøving og feiling velger vi vektoren $\vec{v}$ på en lur måte:

Strategi: Prøving og feiling

$$\text{La } \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 0 + a = \underline{a}$$

$$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.d. } T(\vec{v}) = a$$

Dermed treffes hele kodomenet av funksjonen og T er surjektiv:

$$\Rightarrow \text{im}(T) = \mathbb{R} \quad (4)$$

$$\Rightarrow T \text{ surjektiv} \quad (6)$$

$$(7) \quad T \text{ bijektiv?}$$

Definisjon

For en funksjon $f: A \rightarrow B$, har vi at f er **bijektiv** dersom f er både **injektiv** og **surjektiv**.

Etttersom T IKKE er **injektiv**, er T **ikke bijektiv**.

Oppgave 4

La

$$\beta = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

og

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

være basiser for $\mathbb{R}^2$.

- Finn vektoren $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ uttrykt i β -basisen.
- Finn matrisene A og B slik at $[\mathbf{x}]_{\mathbf{c}} = A[\mathbf{x}]_{\beta}$ og $[\mathbf{x}]_{\beta} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{c}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

$$\beta = \left(\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \quad \mathcal{C} = \left(\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [\vec{y}]_{\beta} = ?$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Generelt: } \vec{x} = b_1 \vec{b}_1 + b_2 \vec{b}_2 = c_1 \vec{c}_1 + c_2 \vec{c}_2 \\ [\vec{x}]_{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

Vi kan sette inn for vektorene $\mathbf{y}$, $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ og løse likningssystemene for å finne $\mathbf{y}$ uttrykt i β -basisen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\vec{y}]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I neste del av oppgaven skal vi finne matrisene som lar oss bytte mellom de ulike basisene:

MÅL: $\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Finne } A \text{ s.a. } [\vec{x}]_{\mathcal{C}} = A [\vec{x}]_{\beta} \\ \textcircled{2} \text{ Finne } B \text{ s.a. } [\vec{x}]_{\beta} = B [\vec{x}]_{\mathcal{C}} \end{array} \right\} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Vi har et teorem som sier at hvis vi har to basiser for et vektorrom, så kan vi finne en matrise som lar oss bytte basis. Altså hvis vi har en vektor $\mathbf{x}$ uttrykt med én basis, så kan vi finne en matrise som lar oss uttrykke vektoren med en annen basisen istedenfor:

Teorem 8.16

V n -dimensjonalt vektorrom

$$\beta = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)$$

$$\gamma = (\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n)$$

Da finnes $A_{n \times n}$ s.a.

$$[\vec{x}]_\gamma = A[\vec{x}]_\beta, \quad \forall \vec{x} \in V$$

hvor kolonnene i A er γ -koordinatvektorene i β :

$$A = \left([\vec{\beta}_1]_\gamma \quad [\vec{\beta}_2]_\gamma \quad \dots \quad [\vec{\beta}_n]_\gamma \right)$$

Vi må bruke teoremet til å finne kolonnene i A , altså C -koordinatene, slik at vi kan bytte fra β -basisen til C -basisen.

$$\textcircled{1} \quad A: \beta \rightarrow C$$

$$\xRightarrow{\text{Thm 8.16}} A = \left[[\vec{b}_1]_C \quad [\vec{b}_2]_C \right]$$

Kolonnene i A gir opphav til følgende likningssystemer, og vi ønsker å finne koordinatene c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$\text{I) } \vec{b}_1 = c_1 \vec{c}_1 + c_2 \vec{c}_2 \rightarrow [\vec{b}_1]_C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{II) } \vec{b}_2 = c_3 \vec{c}_1 + c_4 \vec{c}_2 \rightarrow [\vec{b}_2]_C = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn og løser likningssystemene:

$$\text{I) } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 13/24 \\ 0 & 1 & 7/24 \end{array} \right]$$

$$\text{II) } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/24 \\ 0 & 1 & 13/24 \end{array} \right]$$

Deretter setter vi inn i matrisen A :

$$\Rightarrow A = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$$

I neste del av oppgaven skal vi finne matrisen B som lar oss gå motsatt vei, altså bytte fra $\mathcal{C}$ -basisen til β -basisen:

$$\textcircled{2} \quad B: \mathcal{C} \rightarrow \beta$$

$$\text{Finne } B \text{ s.a. } [\vec{x}]_{\beta} = B[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$$

Vi kan løse oppgaven på samme måte som i stad:

Alt 1:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \vec{c}_1 &= b_1 \vec{b}_1 + b_2 \vec{b}_2 \rightarrow [\vec{c}_1]_{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ \text{II)} \quad \vec{c}_2 &= b_3 \vec{b}_1 + b_4 \vec{b}_2 \rightarrow [\vec{c}_2]_{\beta} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} &= b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & -7/5 \end{array} \right] \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \\ \text{II)} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} &= b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & 13/5 \end{array} \right] \begin{matrix} b_3 \\ b_4 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$$

Alternativt kan løse begge systemene samtidig ved å sette opp en matriselikning:

Au 2:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}_N$$

$$M^{-1} \cdot M B = N$$

$$\underbrace{M^{-1}M}_I B = M^{-1}N$$

$$B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/5 & -7/5 \\ -7/5 & 13/5 \end{bmatrix}$$

Eksamen kont 2019

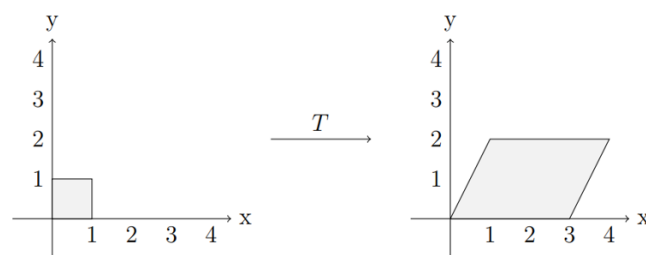
Oppgave 3

En lineærtransformasjon $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbilder firkanten med hjørner i

$(0,0), (1,0), (0,1)$ og $(1,1)$

til parallellogrammet utspent av

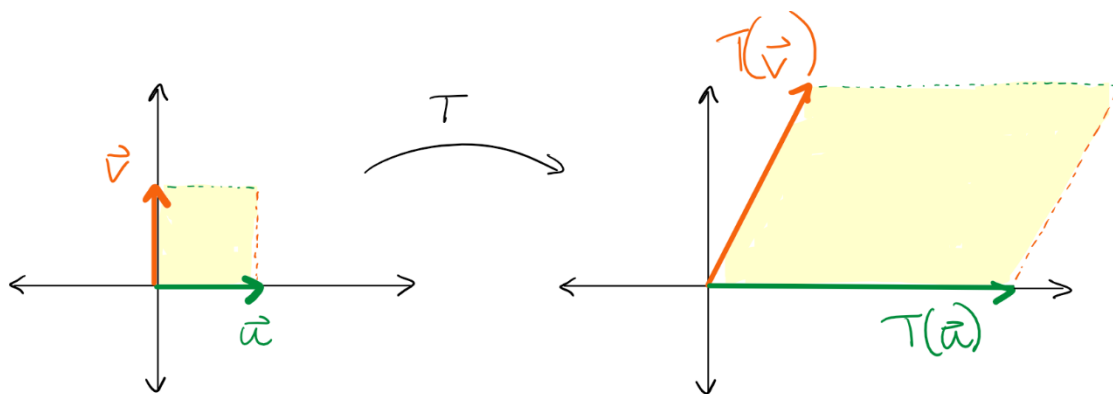
$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



Finn standardmatrisen A til T og regn ut $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Finn $\ker(T)$. Er T surjektiv?

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Husk: En lineærtransformasjon kan beskrives ut fra hva den gjør med basisvektorene (u og v):

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mål:

1. Finne matrisen A for T .
2. Finne $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
3. Finne $\ker(T)$
4. T surjektiv?

$$\textcircled{1} A = [T(\underline{e}_1) \quad T(\underline{e}_2)]$$

$$A = [T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\textcircled{2} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\textcircled{3} \ker(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}$$

$$\Downarrow$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Vi må altså løse det homogene likningssystemet for å finne vektorene som utgjør kjernen til transformasjonen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{ \vec{0} \}$$

$$\textcircled{4} T \text{ surjektiv?}$$

«Yndlingsteorem» (utdrag)

A $n \times n$ -matrise.

Lineærtransformasjonen $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er **surjektiv**

$\Leftrightarrow$

$$\det(A) \neq 0.$$

Se https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4115/2025v/15-inverterbarhet.pdf for fullstendig versjon.

$$T \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{T \text{ surjektiv}}$$

Oppgave 5 (ikke gjennomgått)

b) Finn en basis γ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[p]_{\gamma} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

Er koordinatene til et andregradspolynom p .

$$\mathcal{P}_2 = \{ p(x) = a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

MÅL: Finne en basis $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ for $\mathcal{P}_2$ s.a.

$$[p]_{\gamma} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{polynom}$$

$$\text{La } p(x) = a + bx + cx^2, \quad p \in \mathcal{P}_2$$

$$\begin{aligned} p(0) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 = a \\ p(1) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 = a + b + c \\ p(2) &= a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 = a + 2b + 4c \end{aligned} \Rightarrow [p]_{\gamma} = \begin{bmatrix} a \\ a + b + c \\ a + 2b + 4c \end{bmatrix}$$

Vi må nå finne 3 polynomer, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ s.a. et generelt polynom p kan skrives som en lineærkombinasjon av disse:

$$p(x) = p(0)\gamma_1 + p(1)\gamma_2 + p(2)\gamma_3$$

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b}x + \underline{c}x^2 &= \underline{a}\gamma_1 + (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})\gamma_2 + (\underline{a} + 2\underline{b} + 4\underline{c})\gamma_3 \\ &= \underline{a}\gamma_1 + \underline{a}\gamma_2 + \underline{b}\gamma_2 + \underline{c}\gamma_2 + \underline{a}\gamma_3 + 2\underline{b}\gamma_3 + 4\underline{c}\gamma_3 \\ &= \underline{a}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \underline{b}(\gamma_2 + 2\gamma_3) + \underline{c}(\gamma_2 + 4\gamma_3) \end{aligned}$$

Dette gir oss et likningssystem med 3 likninger og 3 ukjente:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \cancel{q} = \cancel{q}(y_1 + y_2 + y_3) \rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ \text{II)} \quad & \cancel{q}x = \cancel{q}(y_2 + 2y_3) \rightarrow y_2 + 2y_3 = x \\ \text{III)} \quad & \cancel{q}x^2 = \cancel{q}(y_2 + 4y_3) \rightarrow y_2 + 4y_3 = x^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{I)} \\ \text{II)} \\ \text{III)} \end{aligned}} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & x \\ 0 & 1 & 4 & | & x^2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2}(x-2)(x-1) \\ 0 & 1 & 0 & | & x(2-x) \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{x}{2}(x-1) \end{bmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}$$

c) La p være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til p med hensyn på γ .

$$q(x) = x^2$$

$$[q]_{\gamma} = ?$$

ALTERNATIV 1 $\rightarrow [q]_{\gamma} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$

$$q(x) = d y_1 + e y_2 + f y_3$$

$$x^2 = d \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + e x(2-x) + f \frac{x}{2}(x-1)$$

$$\underline{0} + \underline{0x} + \underline{x^2} = \underline{x^2 \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2} \right)} + \underline{x \left(-\frac{3a}{2} + 2b - \frac{c}{2} \right)} + \underline{a}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & | & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow [q]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ALTERNATIV 2

$$[q]_Y = \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \end{bmatrix}$$

$$[x^2]_Y = \begin{bmatrix} 0^2 \\ 1^2 \\ 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
