

Plenumsregning 7: Projeksjon

Eksamen høst 2015

Oppgave 6

La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Finne en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som er ulik nullvektoren og som er ortogonal til $\mathbf{w}$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

u

MÅL: Finne $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ s.a.

① $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$, $a, b \in \mathbb{R}$

② $\vec{x} \neq \vec{0}$

③ $\vec{x}, \vec{w}$ ortogonale

① + ② $\Rightarrow \overbrace{a\vec{u} + b\vec{v}}^{\vec{x}} \neq \vec{0} \Rightarrow a=b=0$ umulig

$a = b = 0$ er umulig ettersom dette ville gjort $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Definisjon (forkortet)

En **ortogonal mengde** er en mengde av ikke-null vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ s.a.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$$

$\forall \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ i mengden med $i \neq j$.

$$\textcircled{3} \vec{x}, \vec{w} \text{ ortogonale} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0$$

Vi vil senere se at det finnes mange ulike indreprodukt, men når det nå ikke er spesifisert, bruker vi skalarproduktet/prikkproduktet:

$$\text{Her: } \vec{x} \cdot \vec{w} = 0$$

$$(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$a\vec{u} \cdot \vec{w} + b\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$a(4 - 2 - 3) + b(4 - 2 - 4) = 0$$

$$-a = 2b$$

Ettersom vi kun trenger å finne én vektor $\vec{x}$ som er en lineærkombinasjon av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, så kan vi velge verdier for a og b , så lenge $-a = 2b$:

$$\text{La } a = 2, b = -1$$

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Det er lurt å sette prøve på svaret, og det kan vi f.eks. gjøre ved å sjekke at $\vec{x}$ og $\vec{w}$ faktisk er ortogonale:

$$\text{P: } \vec{x} \cdot \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 - 2 - 2 = \underline{0} \quad \underline{\text{OK}}$$

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Vis at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utgjør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og finn koordinatene til punktet $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i denne basisen.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MÅN: ① Vis $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ortogonal basis β for $\mathbb{R}^3$
 ② $[\vec{y}]_{\beta}$

① Generelt: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ortogonale $\Leftrightarrow \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ for $i \neq j$

$$\left. \begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = 0 \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ ortogonale}$$

Teorem 9.10

En ortogonal mengde er lineært uavhengig:

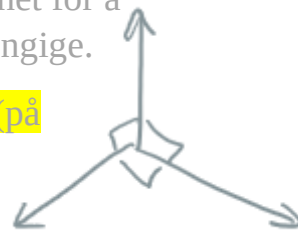
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ortogonale $\Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineært uavhengige.

Men, hvorfor gir det mening at ortogonale vektorer må være lineært uavhengige? Jo, ortogonale vektorer står vinkelrett på hverandre. Dermed kan vi

ikke skrive en av vektorene som en lineærkombinasjon av de to øvrige.

Eksempel: Det finnes ingen måte vi kan kombinere to vektorer i xy -planet for å få en vektor i z -aksen. Altså må ortogonale vektorer være lineært uavhengige.

OBS! Det motsatte (at lineært uavhengighet medfører ortogonalitet) er (på generell basis) ikke sant!



$$\text{I) } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ ortogonale} \xRightarrow{\text{Thm 9.10}} \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ lin. uavh.}$$

Tidligere har vi brukt Teorem 5.14 som sier at n lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$ vil spanne ut $\mathbb{R}^n$. Spennet av en mengde vektorer er jo alle lineærkombinasjonene av dem.

Teorem 5.14

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \text{ er lineært uavhengige} \Leftrightarrow \text{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$$

I dette tilfellet har vi 3 lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$, og det er klart at alle lineærkombinasjoner av disse vil la oss nå alle vektorer i $\mathbb{R}^3$, altså spanner de ut $\mathbb{R}^3$:

$$\text{II) } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ 3 lin. uavh. vektorer i } \mathbb{R}^3 \\ \xRightarrow{\text{Thm 5.14}} \text{Sp}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^3$$

Vi husker jo også definisjonen av basis, så siden de ortogonale vektorene våre både er lineært uavhengige og spanner ut vektorrommet, så danner de også en basis:

Definisjon

En **basis** for et vektorrom V er en liste

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

av vektorer i V som både utspenner V og er lineært uavhengige.

$$\text{I) + II) } \\ \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ ortogonal basis for } \mathbb{R}^3$$

Deretter skal vi finne vektoren $\vec{y}$ i β -basisen:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} \quad [\vec{y}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Vi må altså finne de koeffisientene a, b og c som lar oss uttrykke $\vec{y}$ som en lineærkombinasjon av basisvektorene:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{y} \quad a, b, c = ?$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \Rightarrow \underline{\underline{[\vec{y}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Vi kan sette prøve på svaret ved å sette inn for a, b og c og sjekke om vi faktisk får $\vec{y}$:

$$P: a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{y}$$

ALTERNATIV

For en ortogonal basis $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ for $\mathbb{R}^3$ kan enhver vektor i $\mathbb{R}^3$ uttrykkes som:

$$\vec{y} = P_{\vec{u}}(\vec{y}) + P_{\vec{v}}(\vec{y}) + P_{\vec{w}}(\vec{y})$$

$$P_{\vec{u}}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\vec{v}}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2})^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\vec{w}}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w} = \dots = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 2/3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{[\vec{y}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 2

Finn det ortogonale komplementet til underrommet utspent av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$U = \text{Sp} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \} \text{ underrom av } \mathbb{R}^3$$

$$U^\perp = ?$$

$U^\perp$, det ortogonale komplementet til U , er alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ som står ortogonalt på alle vektorer i U :

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{ \text{Alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ som er ortogonale på } \vec{u}_1 \text{ og } \vec{u}_2 \} \\ &= \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0 \wedge \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0 \} \end{aligned}$$

Vi skal bruke et teorem for å si noe om dimensjonen til $U^\perp$, altså om antall elementer i basisen til $U^\perp$:

Teorem 9.12

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

Dette teoremet gir jo også mening, for enten står (basis)vektorene ortogonalt på hverandre, eller så gjør de ikke det. Da er det forventet at summen av dem spenner ut vektorrommet.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \dim(U) = 2 \\ \dim(V) = 3 \end{array} \right\} &\stackrel{\text{Thm 9.12}}{\Rightarrow} \dim(U^\perp) = 3 - 2 = 1 \\ &\Rightarrow U^\perp \text{ spennes ut av én vektor} \end{aligned}$$

Førne $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ s.d. $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0 = \vec{v} \cdot \vec{u}_2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{i)} = 0 = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{ii)}$$

$$\begin{aligned} i) \quad v_1 + 0 + v_3 &= 0 \\ ii) \quad -v_1 + 0 + 2v_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = s \\ v_3 = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

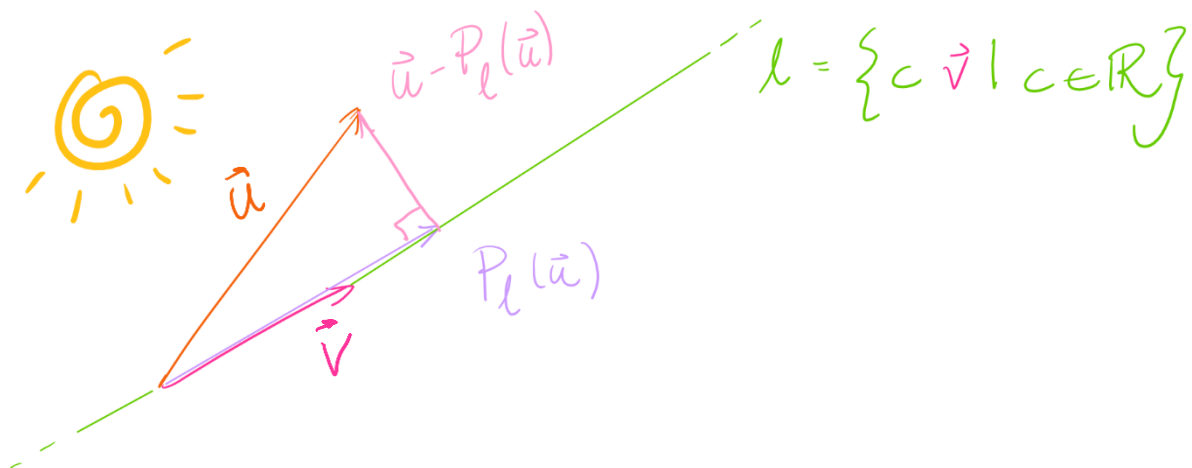
$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \underline{U^\perp = \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Oppgave 3

La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}$.

Vi har nå fått oppgitt to vektorer, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Vi skal finne den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$. Dette er en ny vektor, kalt *projeksjonsvektoren*:



$P_l(\vec{u})$ = "Skyggen av $\vec{u}$ ned på l "
 = En vektor i l hvor $\vec{u} - P_l(\vec{u})$ er
ortogonal på l

$$P_l(\vec{u}) = c \cdot \vec{v}$$

Må finne c . Vet at

$$(\vec{u} - P_l(\vec{u})) \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} - P_l(\vec{u})) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} - c \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\|\vec{v}\|^2} = 0$$

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2})^2 = 14$$

$$\Rightarrow \underline{P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{1}{14}(1, 2, 3)}$$

(Kilde: Khan Academy (2009, 26. oktober). *Introduction to projections | Matrix transformations | Linear Algebra | Khan Academy* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=27vT-NWuw0M>)

Projeksjoner (ortogonale eller ei) brukes i mange praktiske sammenhenger. I byggeindustrien kan det være hensiktsmessig å finne ut hvordan skyggen til en høyblokk forplanter seg i omgivelsene. I spillindustrien kan projeksjoner brukes for å transformere tredimensjonale objekter til en todimensjonal skjerm.

b) Finn standardmatrisen A til $P_{\vec{v}}$.

$$P_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{u} \mapsto P_{\vec{v}}(\vec{u})$$

Måh: Finne A s.a. $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$

Vi husker at standardmatrisen til transformasjonen er bestemt ut ifra hva den gjør med standardbasisvektorene:

$$\beta = \left(\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$A = [P_{\vec{v}}(\vec{e}_1) \mid P_{\vec{v}}(\vec{e}_2) \mid P_{\vec{v}}(\vec{e}_3)]$$

I oppgave a) fant vi projeksjonen av vektoren $(1 \ 0 \ 0)^T$ ned på v , altså har vi allerede funnet ut hva transformasjonen gjør med den første standardbasisvektoren:

$$\begin{aligned}
 a) \ P_{\vec{v}}(\vec{e}_1) &= P_{\vec{v}}(\vec{e}_1) = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 P_{\vec{v}}(\vec{e}_2) &= \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{14} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\
 P_{\vec{v}}(\vec{e}_3) &= \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \dots = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi setter deretter inn i uttrykket for A :

$$A = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

- c) Gi et geometrisk argument for å avgjøre om P_v er **surjektiv** og/eller **injektiv**.

① $P_{\vec{v}}$ injektiv?

Vi vet at en lineærtransformasjon er injektiv hvis det eneste elementet som sendes til $\mathbf{0}$ er nullelementet selv. Dette var Teorem 8.9:

Teorem 8.9

En lineærtransformasjon $T: V \rightarrow V$ er *injektiv* $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

$$P_{\vec{v}} \text{ injektiv} \Leftrightarrow \ker(P_{\vec{v}}) = \vec{0}$$

Hvorfor? 

$$\ker(T) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \text{ kun for } \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ kan reduseres til } I$$

$$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b} \text{ ungyldig løsning } \forall \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ så } \vec{x} \in V \text{ s.a. } T(\vec{x}) = \vec{b},$$

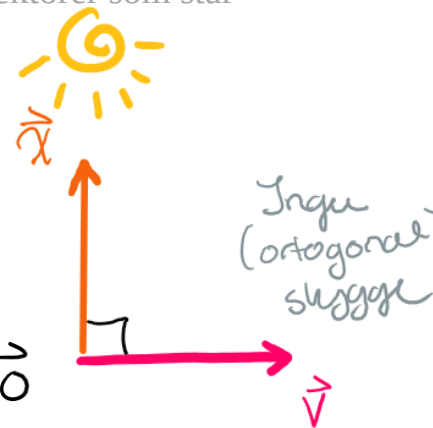
$$T \text{ injektiv}$$

$$\ker(P_{\vec{v}}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

Transformasjonen vi ser på, $P_{\vec{v}}$, finner projeksjonen («skyggen») av vektorene den tar inn ned på $\vec{v}$. Alle vektorer som står vinkelrett på $\vec{v}$ har ingen slik skygge, og sendes til nullvektoren. Det finnes uendelig mange vektorer som står vinkelrett på $\vec{v}$:

Men $P_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \text{ ortogonal på } \vec{v}$

$\hookrightarrow \exists \infty \text{ mange } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a. } P_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{0}$



M.a.o., det er ikke bare nullvektoren selv som sendes til $\vec{0}$, det er faktisk uendelig mange slike vektorer som sendes til $\vec{0}$. Dermed kan vi konkludere med at $P_{\vec{v}}$ IKKE er injektiv:

Konklusjon: $P_{\vec{v}}$ IKKE injektiv

② $P_{\vec{v}}$ surjektiv?

Dette skal vi vise vha. Teorem 8.14:

Teorem 8.14 (forkortet)

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineærtransformasjon. A er standardmatrisen til T .

Da vet vi:

T surjektiv $\Leftrightarrow \text{Sp}\{\text{kolonnene i } A\} = \mathbb{R}^m$.

Hvorfor?

$\text{Sp}\{\text{kolonnene i } A\} = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ Alle vektorer i $\mathbb{R}^m$ kan oppnås ved lineærkombinasjoner av kolonnene til $A \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for alle vektorer $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ Alle vektorer i $\mathbb{R}^m$ treffes av $T \Leftrightarrow T$ surjektiv.

Altså, teoremet sier at P_v er surjektiv hvis spennet av kolonnevektorene til den tilhørende standardmatrisen er lik vektorrommet selv, altså $\mathbb{R}^3$:

$$P_{\vec{v}} \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \text{Sp}\{\text{kolonnene i } A\} = \mathbb{R}^3$$

Men P_v finner bare projeksjonen («skyggen») av en vektor ned på v . Uansett hvilke vektorer vi velger, vil projeksjonen av disse ned på v kun gi oss vektorer på den samme linjen, altså IKKE hele $\mathbb{R}^3$:

$P_{\vec{v}}$ finner bare projeksjoner ned på $\vec{v}$

$$P_{\vec{v}}(\vec{x}) = \underbrace{c \cdot \vec{v}}_{\text{En linje } \subset \mathbb{R}^3} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow P_{\vec{v}} \underline{\text{IKKE}} \text{ surjektiv}$

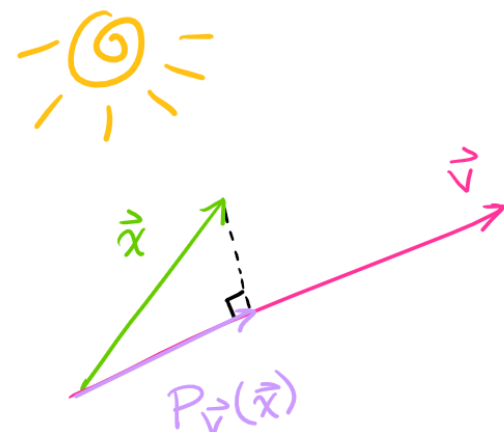
d) Gi et geometrisk argument for å bestemme dimensjonen til

$\ker(P_v)$, $\text{Null}(A)$, $\text{im}(P_v)$ og $\text{Col}(A)$.

Matrisen A beskriver transformasjonen P_v som tar inn vektorer $\mathbf{x}$ og sender disse til skyggen av $\mathbf{x}$ ned på v :

$$P_{\vec{v}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A\vec{x} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \vec{x}$$



Bildet av til P_v , altså alt denne transformasjonen treffer, ligger på samme linje som v . Bildet er altså spennet av v :

$$\text{im}(P_{\vec{v}}) = \text{Sp}\{\vec{v}\}$$

Dette underrommet spennes ut av én vektor og dermed er dimensjonen lik 1:

$$\Rightarrow \dim(\text{im}(P_{\vec{v}})) = 1$$

Videre vet vi at bildet til P_v (alt funksjonen treffer) er lik kolonnerommet til A fordi matrisen A er standardmatrisen til P_v (dette er en del av Teorem 8.11).

Teorem 8.11 (forkortet)

$A_{m \times n}$. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineær transformasjon gitt ved $T(x) = Ax$.

Da er $\ker(T) = \text{Null}(A)$ og $\text{im}(T) = \text{Col}(A)$

Hvorfor dette resultatet holder lar jeg være opp til dere å finne ut av. Hint: Bruk teoremet med mange ekvivalente utsagn for inverterbare matriser!

Når bildet til transformasjonen og kolonnerommet til matrisen beskriver samme mengde, må disse underrommene nødvendigvis ha samme dimensjon:

$$\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{im}(P_{\vec{v}})) = 1$$

Herfra må vi bestemme dimensjonen til kjernen til lineærtransformasjonen P_v og til nullrommet til matrisen A . I forrige oppgave sa vi at det er flere vektorer enn bare nullvektoren som sendes til nullvektoren – nemlig at alle vektorer som står *ortogonalt* på v vil sendes til 0 .

$$P_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ ortogonale på } \vec{v}$$

I $\mathbb{R}^3$ er det to lineært uavhengige vektorer som står ortogonalt på en vilkårlig vektor x (som ikke er 0). Hvordan vet vi det? Jo, fordi ortogonale vektorer er lineært uavhengige. Og vi vet at vi har 3 lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$, altså har vi 2 lin.uavh. vektorer som står ortogonalt på en vilkårlig vektor. Dermed er nullrommet todimensjonalt:

$\mathbb{R}^3$ har 3 lin.uavh. vektorer

↳ Kan finne 3 ortogonale vektorer i $\mathbb{R}^3$

som også er lin.uavh.

⇒ Kan finne 2 vektorer som er ortogonale på $\vec{v}$

$$\Rightarrow \dim(\text{Null}(A)) = 2$$

Men vi vet også at dimensjonen til nullrommet til matrisen = dimensjonen til kjernen til funksjonen:

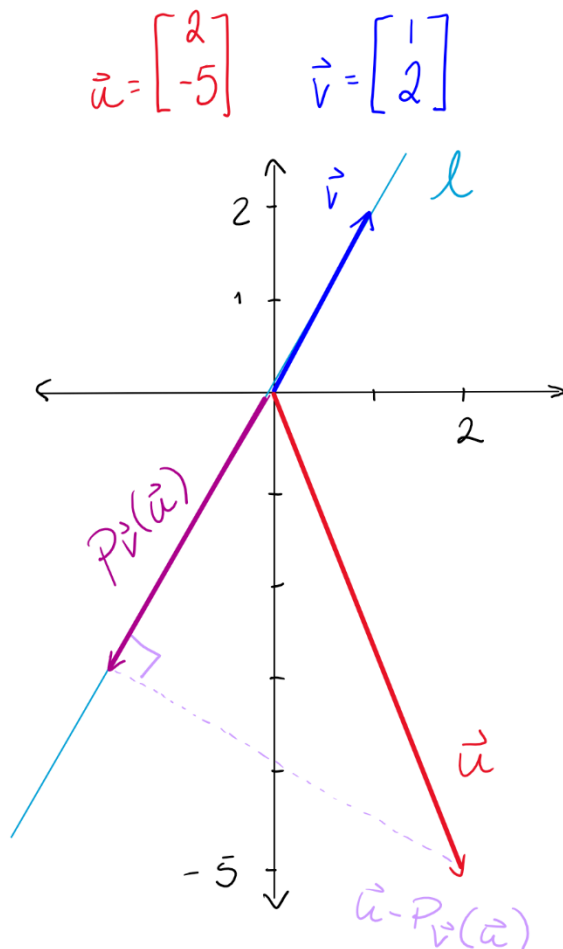
$$\dim(N(P_{\vec{v}})) = \dim(\text{Ker}(P_{\vec{v}})) = 2$$

Oppgave 7

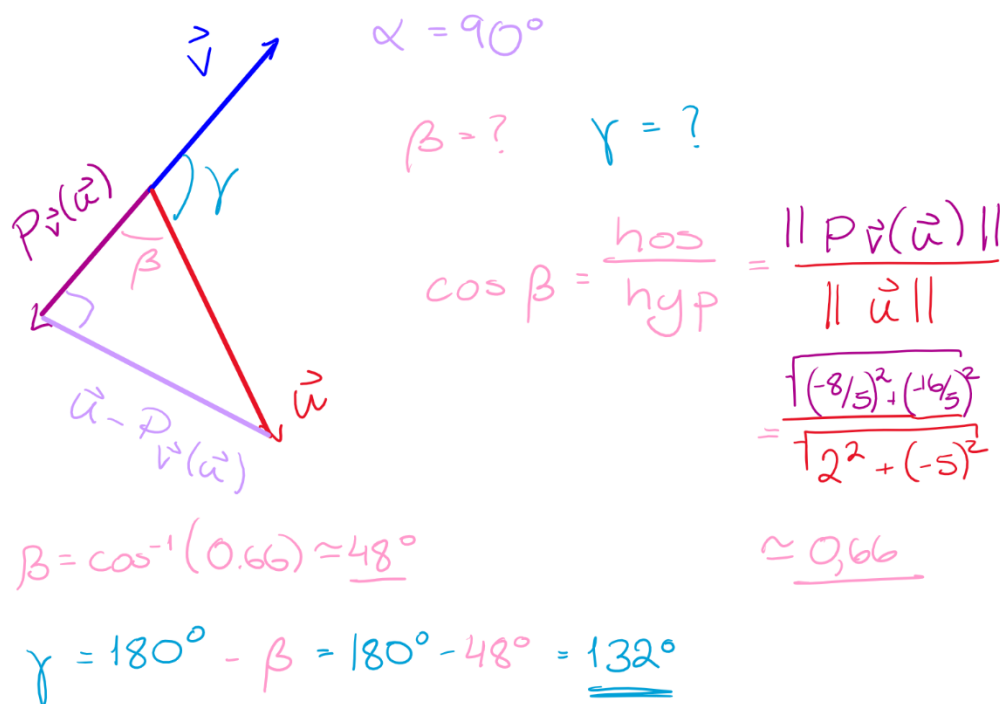
La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$.
- Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem.
- Hva er vinkelen mellom vektorene?



$$\begin{aligned} P_{\vec{v}}(\vec{u}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{(1^2 + 2^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{-\frac{8}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$



Eksamen høst 2018

Oppgave 6

Finn en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av disse vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \text{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \text{ underrom av } \mathbb{R}^4$$

Plan: ① Finne basis β

② Ortogonaliser β

For å være en basis må vektorene være lineært uavhengige. Vi begynner med å sjekke om vektorene vi har fått oppgitt er lineært (u)avhengige. Vi gjør dette ved å sjekke om noen av vektorene er lineærkombinasjoner av hverandre:

$$\text{Ser at } \vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Så vi dropper v_4 . De øvrige vektorene, v_1, v_2, v_3 , er lineært uavhengige. Dette kan (og bør!) sjekkes, f.eks. ved å regne ut determinanten til matrisen med disse kolonnevektorene.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lin. uavh.

(def: $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$)

① $\Rightarrow \beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ basis for U

Nå skal vi ortogonalisere denne basisen vha. Gram-Schmidt-metoden:

② $\beta \rightarrow \beta'$ ortogonal

Gram-Schmidt-metoden:

Gitt en basis $v_1, v_2, \dots, v_k$, kan vi vha. følgende prosess finne en *ortogonal* basis $u_1, u_2, \dots, u_k$:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - p_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - p_{u_1}(v_3) - p_{u_2}(v_3)$$

$\vdots$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{u_j}(v_k)$$

Visuell forståelse av Gram-Schmidt-metoden:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Gram-Schmidt_orthonormalization_process.gif

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - p_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}_2$$

Altså ser vi at v_1 og v_2 allerede var ortogonale.

TIPS: For å unngå dobbelt arbeid i fremtiden bør vi starte med å sjekke om noen av vektorene er ortogonale fra før (da trenger vi jo ikke ortogonalisere dem).

TIPS2: Utfør mellomregninger for f.eks. $v_3 \cdot u_1$ osv. for å redusere risiko for regnefeil. Altså, gjør som jeg sier (skriver), ikke som jeg gjør.

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - p_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - p_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2 = \dots = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 2/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ orthogonal basis for } U$$

$$P: \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$$