

Plenumsregning 8: Mer om projeksjon

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$, $C([0, 1])$, med indreproduktet definert i Teorem 9.24. Regn ut indreproduktet, finn vinkelen og avgjør om de er ortogonale:

a) $-x$ og e^x

Teorem 9.24

Operasjonen

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

er et indreprodukt på $C([a, b])$.

$C([0, 1])$: Indreprod. rommet av kont. funksj
fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$
 a b

a) $f(x) = -x$
 $g(x) = e^x$

① $\langle f, g \rangle = ?$

② $\angle = ?$ mellom f, g

③ f, g ortogonale?

$$\begin{aligned} \text{① } \langle f, g \rangle &= \frac{1}{1-0} \int_0^1 -x e^x dx \\ &= - \int_0^1 x e^x dx \end{aligned}$$

Husk: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

Se på det ubestemte integralet først:

$$\begin{array}{ll} u = x & v = e^x \\ u' = 1 & v' = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= x e^x - e^x \\ &= e^x(x-1) + C \end{aligned}$$

Sett inn i indreproduktet og regn ut bestemt integral:

$$\begin{aligned} \langle -x, e^x \rangle &= - \int_0^1 x e^x dx = - [e^x(x-1)]_0^1 \\ &= - (e^1(1-1) - e^0(0-1)) \\ &= - (-1)(-1) = -1 \end{aligned}$$

Vi finner vinkelen mellom funksjonene (merk at dette ikke er det samme som vinkelen mellom grafene til funksjonene).

$$\textcircled{2} \quad \theta = ? \quad \cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$$

Husk: $\langle f, g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cdot \cos \theta$

$$\langle f, g \rangle = -1 \quad (\text{se over})$$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\langle -x, -x \rangle} = \left(\frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}} \end{aligned}$$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{\langle e^x, e^x \rangle} = \left(\frac{1}{1-0} \int_0^1 e^{2x} dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

Vi bruker integrasjon ved substitusjon:

$$y = 2x \quad y' = 2 \quad dy = y' dx \Rightarrow dx = \frac{1}{y'} dy$$

Vi regner det ubestemte integralet først:

$$\int e^y dx = \int e^y \frac{1}{y'} dy = \int e^y \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + c$$

Vi setter nå inn i det bestemte integralet og substituerer for $y = 2x$:

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

Vi setter så inn i (*) igjen for å regne ut $\|g\|$:

$$(*) \|g\| = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{e^2 - 1}$$

Til slutt løser vi likningen for vinkelen θ og setter inn for $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$ og $\|g\|$:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{e^2 - 1}} \right) \approx \underline{165,7^\circ}$$

Til slutt avgjør vi om funksjonene er ortogonale:

$$\textcircled{3} f, g \text{ ortogonal} \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\text{Men } \theta = 165,7^\circ \neq 90^\circ \Rightarrow f, g \text{ IKKE ortogonale}$$

Eksamen høst 2019

Oppgave 5

La $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dvs V er vektorrommet av alle polynomer av grad 2 eller lavere med reelle koeffisienter. La $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

- a) Oppgi definisjonen av et reelt indreprodukt. Vis at funksjonen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt på V .

$$V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Definisjon

Et **indreprodukt** på et reelt vektorrom V er en funksjon $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ som oppfyller:

- 1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetri)
- 2) $\langle v, aw + bu \rangle = a\langle v, w \rangle + b\langle v, u \rangle$ (Linearitet)
- 3) $\langle v, v \rangle \geq 0$ og $\langle v, v \rangle = 0$ kun dersom $v = 0$ (Positivitet)

Vi sier at V , sammen med et valgt indreprodukt, er et **indreproduktrom**.

$$\textcircled{1} \quad \langle p(x), q(x) \rangle \stackrel{?}{=} \langle q(x), p(x) \rangle$$

Indreproduktet er *symmetrisk* fordi rekkefølgen ikke spiller noen rolle når vi multipliserer polynomer:

$$\int_0^1 p(x) q(x) dx = \int_0^1 q(x) \cdot p(x) dx$$

↑
fordi $p(x)q(x) = q(x)p(x)$

Deretter sjekker vi linearitet:

$$\textcircled{2} \quad \langle p(x), aq(x) + br(x) \rangle \stackrel{?}{=} a\langle p(x), q(x) \rangle + b\langle p(x), r(x) \rangle$$

$$\int_0^1 p(x)(aq(x) + br(x)) dx = \int_0^1 ap(x)q(x) + bp(x)r(x) dx$$

$$= a \underbrace{\int_0^1 p(x)q(x) dx}_{\langle p(x), q(x) \rangle} + b \underbrace{\int_0^1 p(x)r(x) dx}_{\langle p(x), r(x) \rangle} \quad \underline{ok}$$

Vi sjekker om indreproduktet av et polynom med seg selv er positivt:

$$\textcircled{3} \quad i) \quad \langle p(x), p(x) \rangle \geq 0 ?$$

$$\int_0^1 p(x)p(x) dx = \int_0^1 (p(x))^2 dx \geq 0 \quad \text{fordi } (p(x))^2 \geq 0 \text{ på hele } [0,1] \quad \underline{ok}$$

Deretter sjekker vi om indreproduktet av et polynom med seg selv er 0 hvis og bare hvis polynomet selv er 0:

$$\text{ii)} \quad \langle p(x), p(x) \rangle = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} p(x) = 0$$

$$\int_0^1 (p(x))^2 dx \quad \text{Ja, fordi } (p(x))^2 = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \quad \underline{\text{al}}$$

①-③ $\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ er et INDREPRODUKT

$(p(x))^2$ er selv et polynom, og den eneste måten vi kan få et polynom til å bli 0 på (globalt) er dersom alle koeffisientene er 0, dvs $p(x) = 0$.

Eksamen vår 2022

Oppgave 4

Bestem om funksjonene

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \sin(x),$$

er ortogonale i indreproduktrommet $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, når indreproduktet er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Hvis ikke, finn en ortogonal basis for det lineære spennet $\text{span}(f_1, f_2, f_3)$ ved å bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode.

$$f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = x \quad f_3(x) = \sin(x)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

① f_1, f_2, f_3 ortogonale?

Vi vet at to polynomer er ortogonale hvis og bare hvis indreproduktet av dem er 0:

$$\text{Husk: } f, g \text{ ortogonale} \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0$$

Vi sjekker:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi^2 - (-\pi)^2) = 0$$

$\Rightarrow f_1, f_2$ ortogonale

$$\langle f_1, f_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \underbrace{(-\cos(-\pi))}_{-1} = -(-1) + (-1) = 0$$

$\cos(x) = \cos(-x)$

$\Rightarrow f_1, f_3$ ortogonale

$$\langle f_2, f_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$$

Husk: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$u = x$

$v = -\cos(x)$

$u' = 1$

$v' = \sin(x)$

Vi ser på det ubestemte integralet først:

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x)) dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C \end{aligned}$$

Deretter beregner vi indreproduktet med det bestemte integralet:

$$\begin{aligned} \langle f_2, f_3 \rangle &= \left[-x \cos(x) + \sin(x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \underbrace{-\pi \cos(\pi)}_{-1} + \underbrace{\sin(\pi)}_0 - \left(\underbrace{-(-\pi) \cos(-\pi)}_{-1} + \underbrace{\sin(-\pi)}_0 \right) \\ &= -\pi(-1) + (-\pi)(-1) \\ &= 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_2, f_3$ JKKER ortogonale

I neste del av oppgaven skal vi finne en ortogonal basis for spennet av f_1, f_2, f_3 :

② Finne ortogonal basis $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$
for $\text{Sp}\{f_1, f_2, f_3\}$

Vi utfører Gram-Schmidt:

$$\text{La } h_1(x) = f_1(x) = 1$$

I forrige del av oppgaven så vi at f_1 og f_2 var ortogonale ettersom indreproduktet var 0. Altså trenger vi ikke ortogonalisere f_2 :

$$\text{Siden } f_1, f_2 \text{ ortogonale, kan vi la } h_2(x) = f_2(x) = x$$

$$h_3(x) = f_3 - \frac{\langle f_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} h_2 - \frac{\langle f_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

Vi gjør mellomregninger:

$$\langle f_3, h_2 \rangle \stackrel{\text{Symmetri}}{=} \langle h_2, f_3 \rangle \stackrel{h_2=f_2}{=} \langle f_2, f_3 \rangle = 2\pi$$

$$\langle h_2, h_2 \rangle = \langle x, x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\langle f_3, h_1 \rangle \stackrel{\text{Symmetri}}{=} \langle h_1, f_3 \rangle \stackrel{h_1=f_1}{=} \langle f_1, f_3 \rangle = 0$$

Vi setter inn i uttrykket for h_3 :

$$h_3(x) = \sin(x) - \frac{2\pi}{\frac{2\pi^3}{3}} x - 0 = \sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \left(1, x, \sin(x) - \frac{3x}{\pi^2} \right) \text{ ortogonal basis for } \mathcal{S}\{f_1, f_2, f_3\}$$

Merk: I denne oppgaven har vi gjort flere utregninger for integraler av sinus og cosinus. I det offisielle løsningsforslaget til eksamen har man forenklet en del utregninger ved å benytte at x og $\sin(x)$ er odde funksjoner.

Eksamen høst 2023

Oppgave 5

- Avgjør om polynomene

$$p(t) = 2 - t, \quad q(t) = 1 + t^2 \quad \text{og} \quad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikke i $P_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynomer.

- Finn så ut om p og q står ortogonalt på hverandre med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^2 f(k)g(k), \quad f, g \in P_2(\mathbb{R})$$

$$p(t) = 2 - t \quad q(t) = 1 + t^2 \quad r(t) = 1 + 2t - 3t^2 \quad V = P_2(\mathbb{R})$$

① p, q, r lin. uavh.?

Vi uttrykker p, q , og r som vektorer ved hjelp av den ordnede basisen $\beta = (1, t, t^2)$ for $P_2(\mathbb{R})$ (koordinatvektorene kan utledes ved å uttrykke hver av polynomene som en lineærkombinasjon av basisvektorene).

$$\beta = (1, t, t^2)$$

$$2 - t + 0t^2 = a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2$$

$$\begin{cases} 2 = a \rightarrow a = 2 \\ -t = bt \rightarrow b = -1 \\ 0t^2 = ct^2 \rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow [p]_{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jilsv. } [q]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } [r]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Deretter konstruerer vi en matrise A med koordinatvektorene som kolonner:

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad - \quad + \quad -$$

Fra teoremet med de mange ekvivalente påstandene vet vi at kolonnene til matrisen er lineært uavhengige hvis og bare hvis determinanten til matrisen er ulik 0:

$$\text{kol } A \text{ lin. uavh.} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\det(A) = \underbrace{-(-1)}_{+} (\underbrace{1(-3)}_{-4} - 1 \cdot 1) - 2(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = -8 \neq 0$$

$$\Rightarrow p, q, r \text{ lin. uavh.}$$

Deretter må vi avgjøre om polynomene p og q er ortogonale med hensyn på indreproduktet:

$$\textcircled{2} \quad p, q \text{ ortogonale?}$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^2 f(k) g(k) \quad f, g \in P_2(\mathbb{R})$$

Vi regner ut indreproduktet:

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \sum_{k=0}^2 (2-k)(1+k^2) = \sum_{k=0}^2 (2-k+2k^2-k^3) \\ &= \underbrace{(2-0+2 \cdot 0^2-0^3)}_2 + \underbrace{(2-1+2 \cdot 1^2-1^3)}_2 + \underbrace{(2-2+2 \cdot 2^2-2^3)}_0 \\ &= 4 \neq 0 \Rightarrow p, q \text{ IKKE ortogonale fordi } \langle p, q \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Ettersom indreproduktet er 0 kan vi konkludere med at polynomene er ortogonale. Vi skriver svarsetning ettersom alle svar skal begrunnes!

Eksamen kont 2021

Oppgave 8

Vi ser på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

på rommet $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 2\pi]$ til $\mathbb{R}$.

a) Finn en ortonormal basis for $U = \text{Sp}\{\sin(x), \cos(x)\}$.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

$$\mathcal{C}([0, 2\pi]) \quad [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a) \quad U = \text{Sp} \left\{ \underset{f_1}{\sin(x)}, \underset{f_2}{\cos(x)} \right\}$$

En **ortonormal basis** er bare en basis som består av ortogonale vektorer med lengde 1. Dette lager vi ved å først finne en ortogonal basis, og deretter normalisere denne ved å dele basisvektorene på sine respektive lengder.

① Ortogonal basis for U

Først skal vi være litt lure – for kan det tenkes at basisen vi har fått oppgitt faktisk er ortogonal allerede? Vi undersøker ved å regne ut indreproduktet:

$$\langle \sin(x), \cos(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx \quad (*)$$

Vi bruker kjerneregel:

$$\begin{aligned} \text{La } u &= \sin(x) \\ u' &= \cos(x) \\ du &= u' dx \end{aligned}$$

Merk: Også her kan vi bruke egenskapene for odde og jevne funksjoner til å forenkle utregningene. F.eks. er $\sin(x)$ odde, dvs $\sin(-x) = -\sin(x)$, og $\int_0^{2\pi} \text{odde funksjon } dx = 0$. Å integrere fra 0 til 2π istedenfor $-\pi$ til π gir samme resultat pga symmetri og periodisitet.

Vi ser på det ubestemte integralet først:

$$\text{Se på } \int \sin(x) \cos(x) dx = \int \underbrace{u u'}_{du} dx = \int u du = \underline{\underline{\frac{1}{2} u^2 + c}}$$

Deretter setter vi inn i indreproduktet og regner ut det bestemte integralet:

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \quad \langle \sin(x), \cos(x) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^2(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \sin^2(2\pi)}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{2} \sin^2(0)}_{=0} \right] = \underline{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sin(x), \cos(x)$ ortogonal basis for U

Ettersom $\sin(x)$ og $\cos(x)$ allerede er ortogonale trenger vi ikke bruke Gram-Schmidt. Nå må vi lage oss en ortonormal basis. Dette gjør vi ved å finne lengden av funksjonene, og dele hver funksjon på sin respektive lengde:

② Ortonormal basis for U

$$\|\sin(x)\|^2 = \langle \sin(x), \sin(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

Vises vha Eulers formel
 $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \|\sin(x)\| = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\|\cos(x)\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$$

$\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ Eulers formel!

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \|\cos(x)\| = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

For å normalisere må vi altså dele $\sin(x)$ og $\cos(x)$ på sine respektive lengder:

$$\frac{\sin(x)}{\|\sin(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \quad \frac{\cos(x)}{\|\cos(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x)$$

$$\beta' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) \right) \text{ orthonormal basis for } U$$

$f_1' \quad f_2'$

b) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $f(x) = x$ ned på U .

$$b) \quad f(x) = x \quad P_U(f(x)) = ?$$

Vi husker at den ortogonale projeksjonen av en vektor (funksjon) ned på et underrom er summen av projeksjonen på hver av basisvektorene for underrommet:

$$P_U(f(x)) = P_{f_1}(f) + P_{f_2}(f) =$$

$$\frac{\langle f, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 + \frac{\langle f, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2$$

Mellomregning

$$\vdots$$

$$= \underline{-2\sin(x)}$$

Mellomregningene kan dere gjøre selv.

c) Forklar hvorfor $\cos(x + \pi/4)$ er i U , og finn koordinatvektoren til $\cos(x + \pi/4)$ med hensyn på basisen du fant i a). (Siste del ikke gjennomgått)

e) ① Hvorfor $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \in U$?

Vi bruker addisjonsformelen og observerer at $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de *ortogonale* basisvektorene:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \stackrel{\text{add. formel}}{=} \underbrace{\cos(x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4})}_{f_2} - \underbrace{\sin(x) \sin(\frac{\pi}{4})}_{f_1}$$

$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4})$ er en lin. komb. av basisvektorene $\sin(x)$ og $\cos(x)$
 $\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) \in U$

Nå skal vi vise finne koordinatvektoren til $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ ved å skrive den som en lineærkombinasjon av de *ortonormale* basisvektorene:

$$\textcircled{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = a f_1 + b f_2 \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b = ?$$

$$\cos(x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(x) \sin(\frac{\pi}{4}) = a \sqrt{2} \sin(x) + b \sqrt{2} \cos(x)$$

$$\text{I) } -\sin(x) \sin(\frac{\pi}{4}) = a \sqrt{2} \sin(x) \rightarrow a = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{-\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{II) } \cos(x) \cos(\frac{\pi}{4}) = b \sqrt{2} \cos(x) \rightarrow b = \frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$$