

Plenumsregning 9: Egenverdier, egenvektorer og egenrom

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

a) Regn ut egenverdiene, egenvektorene og egenrommene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisjon

$T: V \rightarrow V$ lin.trans.

En skalar λ er en **egenverdi** for T hvis $\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ s.a.

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$ er da en **egenvektor** for T , tilhørende λ .

Dersom T er gitt ved en matrise $n \times n$ -matrise A sier vi at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A tilhørende egenverdien λ .

Egenverdiene er altså skalarer (reelle eller komplekse) som oppfyller likningen $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Vi husker at effekten av lineærtransformasjon kan beskrives vha. en matrise. Altså er det å løse likningen $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ ekvivalent med å løse matriselikningen $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$:

① Egenverdier

$$T: \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

$$\iff A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$\lambda = ? \quad \vec{v}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = ?$$

$$\iff A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff A\vec{v} - \lambda I_2 \vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \underbrace{(A - \lambda I_2)}_{(*)} \vec{v} = \vec{0}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi markerer denne likningen med (*) fordi vi skal bruke den senere når vi skal finne egenvektorene:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}}_{B_{2 \times 2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi skal benytte en del av teoremet med de mange ekvivalente påstandene:

Theorem

$M_{n \times n}$:

$$\underbrace{M\vec{x} = \vec{0} \text{ har kun triviell løsn. } (\vec{x} = \vec{0})}_{A} \iff \underbrace{\det(M) \neq 0}_{B}$$

Negasjonen av dette er:

$$\neg A \iff \neg B$$

$$M\vec{x} = \vec{0} \text{ har ikke-trivielle løsn. } (\vec{x} \neq \vec{0}) \iff \det(M) = 0$$

Vi er ute etter ikke-trivielle løsninger (ettersom nullvektoren ikke kan være en egenvektor), og dermed forsøker vi å finne ut når (dvs. for hvilke λ) determinanten til matrisen er 0.

For hvilke λ er $\det(B) = 0$?

$$\det(B) = \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (1-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Vi går nå tilbake til (*) og finner de tilhørende egenvektorene:

$$(2) (A - \lambda_i I_2) \vec{v} = \vec{0} \text{ for } i \in \{1, 2\}$$

$$i) \lambda_1 = 0$$

$$(A - \textcolor{red}{0}I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\vec{0}$ kan ikke være egenvektor

ii) $\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$(A - \textcolor{blue}{1}I)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \textcolor{blue}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} u_1 = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ -u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b) Skissér egenrommene. $E_0 = ?$ $E_1 = ?$

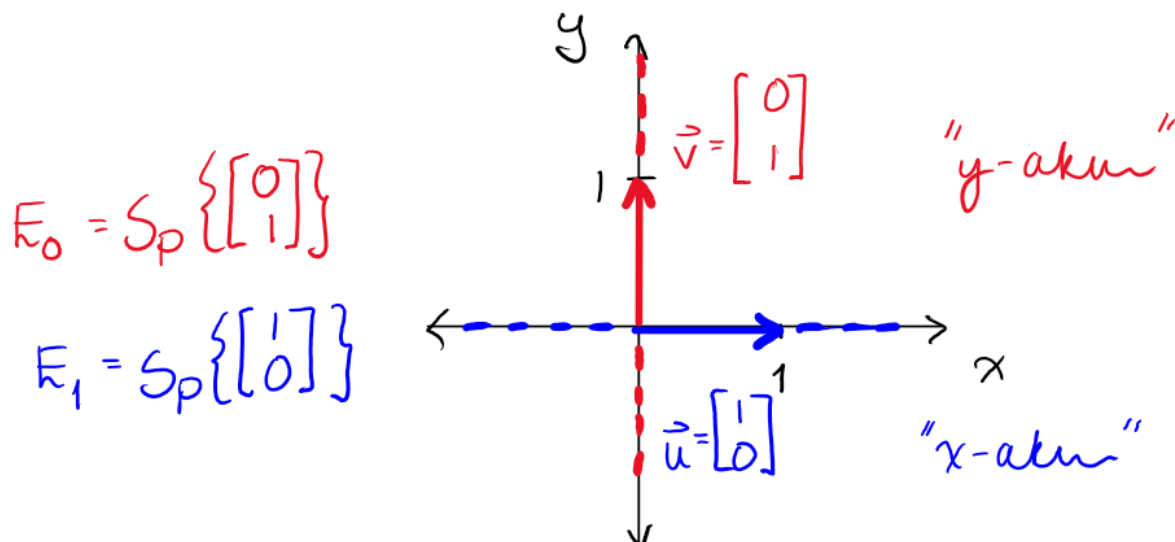
Definisjon

$T: V \rightarrow V$ lin.trans.

λ egenverdi for T .

Da er **egenrommet** til λ mengden av alle egenvektorer til λ og $\vec{0}$:

$$E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$



Oppsummering

- 1) Finne *egenverdier* ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$.
- 2) Finne *egenvektorer* ved å løse $(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$.
- 3) *Egenrommet* tilhørende en gitt egenverdi kan beskrives som spennet av egenverdiens tilhørende egenvektor(er).

Oppgave 3

Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke.

Begrunn svaret ditt.

- a) En $n \times n$ -matrise A har alltid n egenverdier.

P1: "En $n \times n$ -matrise har alltid n egenverdier"

Egenverdiene, λ_i , er løsningene til $\det(A - \lambda_i I) = 0$
 for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 $\in \mathbb{P}_n$
 dersom $A_{2 \times 2}$

Det er kjent at et 2. gradspol. har 0, 1, 2 (reelle) løsn.

Presisering

En 2×2 -matrise

- har 2 egenverdier i $\mathbb{C}$ (dersom vi tar høyde for multiplisitet), ref algebraens fundamentalteorem.
- har 1 eller 2 *distinkte* egenverdier.
- har 0, 1 eller 2 *reelle* egenverdier, avhengig av hvor mange røtter det karakteristiske polynomet har.

- b) Dersom A har en ikke-null egenverdi λ , så kan ikke A være lik nullmatrisen.

P2: "A m. egenverdi $\lambda \neq 0 \Rightarrow A \neq \mathbf{0}$ " Nullmatrise

Anta $\lambda \neq 0$

λ egenverdi $\Rightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}$ s.a. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\underbrace{A \neq \mathbf{0} \quad \neq \mathbf{0} \quad \neq \mathbf{0}}_{\neq \mathbf{0}} \quad A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- x er pr def av egenvektor ulik $\mathbf{0}$.
- λ er per antakelse ulik $\mathbf{0}$.
- Dermed er høyre side av likningen forskjellig fra $\mathbf{0}$.

For å ikke få en motsigelse må altså venstre side av likningen, $A\vec{x}$, også være forskjellig fra $\mathbf{0}$. Da kan ikke A være nullmatrisen (hvis A var nullmatrisen ville venstre side blitt $\mathbf{0}$):

$$\Rightarrow A \neq \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ P2 SANN

- c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

P3: " $\vec{x}, \vec{y}$ egenvektorer for A m. samme egenverdi λ
 $\Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ kan være lin. uavh."

Vi skal avgjøre om påstanden er sann ved å finne et eksempel på at det er mulig. Vi skal IKKE vise at det alltid er slik (det er det faktisk ikke).

Strategi: Prøving og feiling

Vi starter prøvingen med noe, enkelt, f.eks. identitetsmatrisen, I_2 :

$$\text{La } A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{egenvektorer m. } \lambda = 1$$

I en eksamenssituasjon kan det være lurt å verifisere at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ faktisk er egenvektorer med samme egenverdi (sjekk at $A\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$ og at $A\mathbf{y} = 1\mathbf{y}$).

$$(\text{Sjekk } A\vec{x} = 1\vec{x}, A\vec{y} = 1\vec{y})$$

Vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er lineært uavhengige (de kan jo ikke skrives som skalarmultipler av hverandre). Dermed er P3 sann:

$$\vec{x}, \vec{y} \text{ lin. uavh.} \Rightarrow P3 \quad \underline{\underline{\text{SANN}}}$$

Oppgave 4

La A være en $n \times n$ -matrise. Vis at A og dens transponerte A^T har like egenverdier.

Vet: $A_{n \times n}$

Vil vise: A og A^T like egenverdier

Teorem 10.9

$A_{n \times n}$.

Egenverdiene til A er alle løsninger λ av

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Det følger altså av Teorem 10.9 at det er nok å vise at A og A^T har samme karakteristiske polynom:

$$\text{Nok å vise: } \det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$$

Vi tar utgangspunkt i det karakteristiske polynomet til A^T , og bruker noen regneregler:

$$\begin{aligned} \det(A^T - \lambda I) &\stackrel{I=I^T}{=} \det(A^T - (\lambda I)^T) \stackrel{A^T - B^T = (A-B)^T}{=} \det((A - \lambda I)^T) \\ &\stackrel{\det(B) = \det(B^T)}{=} \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Ettersom de karakteristiske polynomene er like, har de også samme løsninger. Dermed kan vi konkludere med at A og A^T har like egenverdier:

$$\Rightarrow A \text{ og } A^T \text{ har like egenverdier}$$

Oppgave 7

Finn hver matrices determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A) = (-1)(1 \cdot 0 - (-2) \cdot 1) = -2$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-2-\lambda)(-\lambda(-\lambda) - (-1) \cdot 1) \\ &= (-2-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda^2 = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{cases}$$

Altså, en reell matrise kan ha komplekse egenverdier. Vi finner kun egenrommet som hører til egenverdien $\lambda_3 = i$. Resten klarer dere selv (:

$$\boxed{\lambda_3 = i} \quad (A - (-i)I_3)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2+i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_1 + ix_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_3 = s, s \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

$$\text{La } s=1, \quad E_{-i} = S_P \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Merk at dersom vi sammenligner egne svar med løsningsforslag, kan vi få ulike svar, ettersom alle skalarmultipler av egenvektorer også er egenvektorer.

Eksamen Kont 2018

Oppgave 6

- a) La P være en kvadratisk matrise slik at $P^2 = P$. Vis at egenverdiene til P kun kan være 0 eller 1.

Vet: $P_{n \times n}$, $P^2 = P$

Vil vise: $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$

Beweis:

La $\vec{v}$ egenvektor for P m. egenverdi λ

$$P\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$P^2\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$P(P\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

$$= \lambda\vec{v}$$

$$P\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda(P\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda\vec{v}$$

$$\lambda^2\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda^2\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(\lambda^2 - \lambda)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \lambda^2 - \lambda = 0$$

$\vec{v}$ egenvektor

$$\vec{v} = \vec{0} \text{ UMULIG}$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 0 \vee \lambda = 1 \quad \square$$

- b) Gi et eksempel på en 2×2 -matrise P slik at $P^2 = P$ og som har egenverdier 0 og 1.

MÅh: Finne $P_{2 \times 2}$ s.a. $P^2 = P$ og $\lambda = 0$ og $\lambda = 1$

Strategi: Prøve m. enkle 2×2 -matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A \quad \underline{\text{OK}}$$

Eigenverdiene til denne matrisen fant vi i dagens første oppgave:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \underline{\text{OK}}$$

- c) Gi et eksempel på en 2×2 -matrise P som har egenverdier 0 eller 1 eller begge, og som **ikke** tilfredsstiller $P^2 = P$.

Denne overlater jeg til dere. Strategien er samme som i forrige oppgave, vi prøver og feiler med enkle 2×2 -matriser, f.eks:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksamen vår 2018

Oppgave 6

- a) Fullfør utsagnet til en definisjon: «Et tall λ er en **egenverdi** til en kvadratisk (square) matrise A dersom...»

Definisjon

En skalar λ er en **egenverdi** til $A_{n \times n}$ dersom det finnes en $v \neq 0$ s.a.

$$Av = \lambda v$$

b) Finn en matrise A slik at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 2, og

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 3.

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 2 \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 3$$

Mål: Finne $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ s.a.

$$1) A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$2) A\vec{v}_3 = \lambda_3 \vec{v}_3$$

$$1) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ c + 2d = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 3 \\ c + 3d = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ c + 2d = 4 \\ a + 3b = 3 \\ c + 3d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{array} \right]$$

Gauss $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -6 \\ d = 5 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

Oppgave X

Anta at A er en $n \times n$ -matrise, og at $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ er lineært uavhengige egenvektorer til A med korresponderende egenverdi 2. La $\mathbf{v} = 5\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$. Er $\mathbf{v}$ en egenvektor til A ?

- ☐ Ja, $\mathbf{v}$ er en egenvektor til A med egenverdi 2.
- ☐ Ja, $\mathbf{v}$ er en egenvektor til A med egenverdi 5.
- ☐ Nei, $\mathbf{v}$ er ikke en egenvektor til A .

$A_{n \times n}$

$\vec{y}, \vec{z}$ lin. uavh. egenvektorer for A m. $\lambda=2$

$$\vec{v} = 5\vec{y} + 5\vec{z}$$

E_2 er det underrommet som består av alle egenvektorene som hører til egenverdien $\lambda = 2$.

$$E_2 = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{u} = 2\vec{u} \}$$

Ettersom dette selv er et vektorrom betyr det at det er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon:

E_2 vektorrom $\Rightarrow E_2$ lukket under addisjon og skalarmult

$$\text{Siden } \vec{y}, \vec{z} \in E_2 \Rightarrow (\vec{v} = 5\vec{y} + 5\vec{z}) \in E_2$$

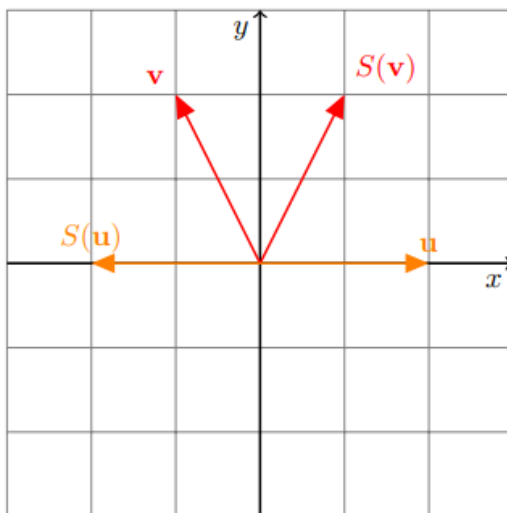
$\uparrow$
 lin. komb. av
 $\vec{y}$ og $\vec{z}$

$\Rightarrow \vec{v}$ egenvektor for A m. egenverdi $\lambda=2$

Eksamen vår 2022

Oppgave 7

La $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon som speiler vektorer i $\mathbb{R}^2$ om y-aksen:



Hva er egenverdiene til lineærtransformasjonen?

- a) 0, -1 og 1
- b) 0 og 1
- c) -1 og 1
- d) Kun 1

Vi skal løse oppgaven ved å finne standardmatrisen for lineærtransformasjonen, og deretter regne ut matrisens egenverdier:

Plan: ① Finne std. matrise A tilh. S
 ② Løse $\det(A - \lambda I) = 0$

S er en lineærtransformasjon, og effekten av denne på en gitt vektor kan oppnås ved å gange med dens standardmatrise, A :

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen er bestemt ut fra hva den gjør med standardbasisvektorene:

$$A = [S(\vec{e}_1) \mid S(\vec{e}_2)]$$

$$S(\vec{e}_1) = S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S(\vec{e}_2) = S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = \underbrace{(-1-\lambda)}_{\lambda_1 = -1} \underbrace{(1-\lambda)}_{\lambda_2 = 1} = 0$$
