

Plenumsregning 10: Egenvektorer, egenverdier og diagonalisering

Oppgave 1

For

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 1) Finn **egenverdien(e)** til A
- 2) Finn **egenvektorene** til A
- 3) Avgjør om A er **diagonaliserbar**
- 4) Dersom A er diagonaliserbar, finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene til A er nullpunktene til det karakteristiske polynomet, dvs løsninger av likningen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Egenverdier} &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \\ \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((-\lambda)^2 - (-1) \cdot 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \\ &\quad \quad \quad \begin{matrix} + & \div & + \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3-\lambda &= 0 \vee \lambda^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 3 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{cases} \end{aligned}$$

Den reelle matrisen A har altså 3 (komplekse) egenverdier. Vi finner de tilhørende egenvektorene til A :

$$\textcircled{2} \text{ Egenvektorer} \Leftrightarrow (A - \lambda_i I) \vec{x}_i = \vec{0} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$i) \boxed{\lambda_1 = 3} \quad (A - 3I) \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ii) \boxed{\lambda_2 = i} \quad (A - iI) \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \quad \boxed{\lambda_3 = -i} \quad (A - (-i)I)\vec{z} = \vec{0}$$

Mellomregning:

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & i & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & | & 0 \end{bmatrix} \cdot (-i) \quad i(-i) = -\cancel{(-2)} = 1$$

$$(3+i)(3-i) = 3^2 + 3i - 3i - \cancel{(-2)} = 9 + 1 = 10$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & | & 0 \\ 1 & i & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 10 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow (-1) \\ \cdot (1/10) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + iz_2 = 0 \\ z_2 = s \\ z_3 = 0 \end{cases} \quad s \in \mathbb{C}$$

Egenvektorene tilhørende egenverdien $-i$ er alle vektorer på følgende form, foruten nullvektoren (for å være helt presise må vi altså ekskludere skalaren 0 når vi bestemmer egenvektorene):

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

For å finne én egenvektor, fikserer vi en skalar s :

$$\text{La } s = 1 \quad \vec{z}' = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deretter skal vi avgjøre om A er diagonaliserbar:

③ A diagonaliserbar?

Definisjon

$A_{n \times n}$ **diagonaliserbar** hvis $A = PDP^{-1}$ m. P inverterbar, D diagonal.

Teorem 11.3

$A_{n \times n}$ n forskjellige egenverdier $\Rightarrow A$ diagonaliserbar.

I første del av oppgaven fant vi 3 ulike egenverdier for A . Dermed kan vi konkludere med at A er diagonaliserbar.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \xrightarrow{\text{Thm 11.3}} A \text{ diagonaliserbar}$$

Til slutt finner vi matrisene P og D som diagonaliserer A :

$$(4) \text{ Finn } P_{3 \times 3} \text{ og } D_{3 \times 3} \text{ s.a. } A = PDP^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$P = [\vec{x} \mid \vec{y} \mid \vec{z}] = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For å verifisere at vi har regnet riktig, kan vi finne den inverse matrisen, P^{-1} , og kontrollere at $A = PDP^{-1}$:

$$[P \mid I] \sim [I \mid P^{-1}] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \\ i/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sjekk: } A = PDP^{-1}$$

Oppgave 4

La $T: P_2 \rightarrow P_2$ være lineærtransformasjonen som deriverer andregradspolynomer:

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

$$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \text{ skalar}\}$$

$$T: P_2 \rightarrow P_2$$

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

a) Finn $A_{3 \times 3}$ så $J(p) = Ap$ for $p \in P_2$

$$\text{mhp } \beta = (1, x, x^2)$$

Standardmatrisen A for lineærtransformasjonen er bestemt ut fra hva den gjør med basisvektorene:

$$A = \begin{bmatrix} [J(1)]_\beta & [J(x)]_\beta & [J(x^2)]_\beta \end{bmatrix}$$

Vi starter med å finne ut hva transformasjonen gjør med den første basisvektoren, altså deriverer vi polynomet 1:

$$J(1) = (1)' = 0$$

Deretter uttrykker vi det resulterende polynomet som en lineærkombinasjon av basisvektorene. Dette lar oss finne koordinatvektoren $[J(1)]_\beta$:

$$0 = \overset{c}{0} \cdot 1 + \overset{b}{0} \cdot x + \overset{a}{0} \cdot x^2 \Rightarrow [J(1)]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBS: Legg merke til rekkefølgen på koordinatene! Disse må stemme overens med rekkefølgen i basisen (konstantledd først).

Vi gjentar prosessen for de resterende basisvektorene:

$$J(x) = (x)' = 1$$

$$1 = \overset{c}{1} \cdot 1 + \overset{b}{0} \cdot x + \overset{a}{0} \cdot x^2 \Rightarrow [J(x)]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x^2) = (x^2)' = 2x$$

$$2x = \overset{c}{0} \cdot 1 + \overset{b}{2} \cdot x + \overset{a}{0} \cdot x^2 \Rightarrow [J(x^2)]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed gjenstår bare å fylle inn kolonnene i A :

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A . Er A diagonaliserbar?

b) ① Finn egenverdiene til A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$+ \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (-\lambda)((-\lambda)^2 - 2 \cdot 0) = (-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 0}$$

② Finne egenvektorene til A

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{\lambda=0} A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = s, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

③ A diagonaliserbar?

Teorem 11.2

$A_{n \times n}$ diagonaliserbar $\Leftrightarrow A$ har n lineært uavhengige egenvektorer.

A er en 3×3 -matrise, men A har IKKE 3 lineært uavhengige egenvektorer.

A har IKKE 3 lin. uavh. egenvektorer

Altså er ikke A diagonaliserbar:

Jhm
11.2 $\Rightarrow A$ IKKE diag. bar

Oppgave 8

La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2 -matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A . Vis at egenverdiene er reelle.

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

MÅN: ① Finne formel for λ_1 og λ_2

② Vise at $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Som vanlig finner vi egenverdiene som røttene til det karakteristiske polynomet, dvs. løsninger av andregradslikningen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r_1 - \lambda & z \\ \bar{z} & r_2 - \lambda \end{bmatrix} \right| = (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) - z \cdot \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 r_2 - r_1 \lambda - r_2 \lambda + \lambda^2 - z \cdot \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 - z \bar{z} = 0$$

$$a=1 \quad b=-(r_1+r_2) \quad c=r_1 r_2 - z \bar{z}$$

$$b = -r_1 - r_2$$

Vi bruker så abc-formelen:

abc-formel:

$$\lambda = \frac{-(-r_1 - r_2) \pm \sqrt{(-r_1 - r_2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (r_1 r_2 - z \bar{z})}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - 4r_1 r_2 + 4z \bar{z}}}{2}$$

Vi gjenkjenner 2. kvadratsetning, og finner dermed en eksplisitt formel for egenverdiene:

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + 4z \bar{z}}}{2}$$

2. □-setning

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4z \bar{z}}}{2}$$

Nå skal vi vise at egenverdiene er reelle. Dette innebærer å vise at det som står under rottegnet er positivt (er det negativt får vi komplekse løsninger):

$$\underbrace{(r_1 - r_2)^2 + 4z \bar{z}}_{(*)} \geq 0$$

- Ettersom $(r_1 - r_2)^2$ er et kvadrat MÅ dette leddet være positivt.
- Videre, $z \cdot \bar{z}$ er kvadratet av absoluttverdien til z , og dermed også positivt (se kapittel 1 om komplekse tall, s. 3).

$$(r_1 - r_2)^2 \geq 0$$

(kvadrat)

$$4z \cdot \bar{z} \geq 0? \quad \begin{cases} z = a+bi \\ \bar{z} = a-bi \end{cases}$$

$$4z \cdot \bar{z} = 4(a+bi)(a-bi) = 4(a^2 + b^2) = 4|z|^2 \geq 0$$

Siden alle leddene under rottegnet er positive, må også summen av dem være positiv:

$$\Rightarrow \bigcirc \geq 0$$

Vi kan derfor konkludere med at egenverdiene må være reelle:

Svar: Alle λ må være reelle fordi vi IKKE tar rota av negative tall

Eksamen kont 2019

Oppgave 5

Finn en eksplisitt formel for A^n når $n \geq 0$ og

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Da } A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

MÅL: Eksplisitt formel for A^n , $n \geq 0$

Vi antar nå at A er diagonaliserbar (dette får vi verifisert senere når vi regner ut at A har to forskjellige egenverdier, ref Teorem 11.3):

$$\text{Anta } A \text{ diag. bar.} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

Vi skal illustrere at den diagonale formen enkelt lar oss regne ut multipler av A :

$$\boxed{A^n = P D^n P^{-1}}$$

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = P \underbrace{D^{-1}P^{-1}P}_{=I} D^{-1} = P \underbrace{D^{-1}D}_{=I} P^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = P \underbrace{D^{-1}P^{-1}P}_{=I} D^{-1} P \underbrace{D^{-1}P^{-1}P}_{=I} D^{-1} = P \underbrace{D^{-1}D^{-1}D}_{=I} P^{-1} = PD^3P^{-1}$$

Slik fortsetter det hele veien til A^n :

⋮

$$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}, n \geq 0$$

Dette kan vi bruke for å finne en eksplisitt formel for A^n . Planen er som følger:

PLAN: Finne ① $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
 ② $P = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2]$
 ③ P^{-1}

Vi finner først egenverdiene og matrise D :

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \neq \Rightarrow A \text{ diagbar} \\ \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi har nå verifisert at A har forskjellige egenverdier, og dermed vet vi nå at A er diagonaliserbar. Vi finner så egenvektorene og matrise P :

$$\textcircled{2} \boxed{\lambda_1 = 2} : (A - 2I) \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = -1} : (A - (-1)I) \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = [\vec{x} \mid \vec{y}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Og vi finner inversen til P :

$$\textcircled{3} [P|I] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=I} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=P^{-1}}$

Til slutt skriver vi opp formelen for A^n :

$$\Rightarrow A^n = P D^n P^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right]$$

Oppgave 6

Skriv ned definisjonen av en diagonaliserbar kvadratisk matrise. Vis at en diagonaliserbar 2×2 -matrise med egenverdi med algebraisk multiplisitet to må være diagonal.

Definisjon

$A_{n \times n}$ er **diagonaliserbar** hvis $\exists D_{n \times n}$ diagonal og $P_{n \times n}$ inverterbar s.a.

$$A = P D P^{-1}$$

Definisjon (forkortet)

Et n -te gradspolynom har n komplekse løsninger (når vi teller med multiplisitet). Når λ_k er en løsning til det karakteristiske polynomet med multiplisitet m , sier vi at λ_k er en egenverdi med **algebraisk multiplisitet** m .

Vet: $A_{2 \times 2}$ diag.bar
 λ alg. mult. 2

Å vise: A diagonal

At A er diagonaliserbar og har en egenverdi λ med multiplisitet 2 betyr at det finnes en diagonalmatrise D med egenverdien langs diagonalen. Vi skriver:

$\textcircled{1} A \text{ diag.bar} \wedge \lambda \text{ alg. mult. } 2 \Rightarrow \exists D_{2 \times 2} \text{ diagonal s.a.}$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I \quad \Rightarrow D = \lambda I$$

Videre, at A er diagonaliserbar betyr også at da finnes en inverterbar matrise P slik at $A = PDP^{-1}$:

② A diag.bar $\Rightarrow \exists P_{2 \times 2}$ inverterbar s.a.

$$A = PDP^{-1}$$

$$AP = PDP^{-1}P$$

$$AP = PD$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$\lambda I = P^{-1}AP$$

$$\lambda IP^{-1} = P^{-1}APP^{-1}$$

$$\lambda P^{-1} = P^{-1}A$$

$$P\lambda P^{-1} = P P^{-1}A$$

$$\lambda PP^{-1} = A$$

$$\lambda I = A$$

$$D = A \text{ og } A \text{ er diagonal } \square$$

Dermed har vi vist at A er lik D og (per definisjon av D) diagonal.

Eksamen høst 2018

Oppgave 7

La R være følgende matrise:

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Regn ut R^{42} .

MÅH: Finne R^{42}

Alt 1: $R = PDP^{-1} \Rightarrow R^{42} = PD^{42}P^{-1}$

Dette kan vi for så vidt gjøre vha. formelen $A^n = PD^nP^{-1}$. Dette er tidkrevende, så istedenfor skal vi skrive R på en lur måte:

Alt 2: Skrive R på en lur måte

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \cos(\pi/3) = 1/2 \\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \end{matrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$$

Vi kjenner igjen R som en rotasjonsmatrise (se https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix) som roterer vektorer med en vinkel på $\pi/3$ med klokka:

$R\vec{v}$: R roterer $\vec{v}$ m. $\theta = \pi/3$ med klokka

Å rotere med $\pi/3$ seks ganger tilsvarer en hel runde – dvs. det svarer til å ikke gjøre noe. En vektor som prikkes med R seks ganger resulterer altså i den samme vektoren. Med symboler:

$$(\pi/3) \cdot 6 = 2\pi \quad (\text{En runde, tilbake til start})$$

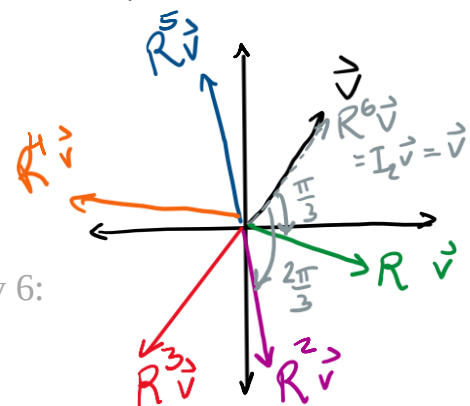
$$R^6 \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v}_{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow R^6 = I_2$$

Vi skulle finne R^{42} og kjenner igjen 42 som en multiplum av 6:

$$R^{42} = R^{6 \cdot 7} = (R^6)^7 = I_2^7 = I$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R^{42} = I_2}}$$



Eksamen høst 2014

Oppgave 4 (forkortet)

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Avgjør om A er diagonaliserbar.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Legg merke til at A er en symmetrisk matrise:

Definisjon

En reell matrise kalles **symmetrisk** dersom $A = A^T$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Fra Teorem 11.14 vet vi (blant annet) at A er diagonaliserbar:

Teorem 11.14

La A være en symmetrisk $n \times n$ -matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliserbar (som en reell matrise).

$$A = A^T \xrightarrow{\text{Thm 11.14}} A \text{ diagonaliserbar}$$

b) Finn en ortonormal basis av egenvektorer for A (ikke gjennomgått).Først må vi finne egenverdiene og egenvektorene til A :

$$b) \quad \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \vee \quad \lambda_2 = 3 \quad (\text{alg. mult. } 2)$$

$$(A - 0I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ v_2 &= s \\ v_3 &= t \end{aligned} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deretter lager vi en **ortogonal** basis av egenvektorer:

ORTOGONAL basis:

Fra Teorem 11.16 vet vi at v_1 er ortogonal på v_2 og v_3 – Dette fordi de er egenvektorer til forskjellige egenverdier:

Teorem 11.16

La A være en reell symmetrisk $n \times n$ -matrise.
Egenvektorene til A tilhørende to distinkte egenverdier er ortogonale.

A symmetrisk $\Rightarrow \vec{v}_1$ ortogonal på $\vec{v}_2, \vec{v}_3$

Vi ortogonaliserer så v_2 og v_3 vha. Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Til slutt normaliserer vi vektorene for å finne en **ortonormal** basis av egenvektorer:

ORTONORMAL basis:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3} \quad \|\vec{u}_2\| = \sqrt{2} \quad \|\vec{u}_3\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

D er matrisen med egenverdiene langs diagonalen:

$$c) D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

P er matrisen med egenvektorene som kolonner:

$$P = [\vec{w}_1 \mid \vec{w}_2 \mid \vec{w}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

Ettersom P er en ortogonal matrise, vet vi (fra kapittel 11 om diagonalisering, s. 6) at $P^{-1} = P^T$:

$$P^{-1} = P^T$$

↑

P ortogonal

Dermed kan vi skrive A som følgende produkt:

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = PDP^T}}$$