

Plenumsregning 11: Interpolasjon, regresjon og Markov-kjeder

Eksamen høst 2018

Oppgave 4

Se på de tre punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^2.$$

- a) Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a) Finn $p(x) = ax^2 + bx + c$ s.a.

$$\begin{cases} p(0) = -1 & \Leftrightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1 \\ p(1) = 1 & \Leftrightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ p(2) = 7 & \Leftrightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow p(x) = 2x^2 + 0x - 1 = \underline{2x^2 - 1}$$

- b) Bruk minste kvadraters metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer til de tre punktene.

b) Finn $q(x) = dx + e$ som passer best til A, B, C

$$\begin{cases} q(0) = -1 & \Leftrightarrow 0 \cdot d + e = -1 \\ q(1) = 1 & \Leftrightarrow 1 \cdot d + e = 1 \\ q(2) = 7 & \Leftrightarrow 2 \cdot d + e = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$A_{3 \times 2} \quad X_{2 \times 1} \quad \vec{b}_{3 \times 1}$

Her har vi et likningssystem med flere likninger (3 stk) enn ukjente (2 stk, e og d), altså er systemet **overbestemt**.

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A_{m \times n}, \quad m > n, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} = ?$$

Men dersom vi forsøker å løse systemet, ser vi at det ikke har noen løsning:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right] \quad \text{⚡ } 0 \neq 6$$

Vi kan altså ikke finne et førstegradspolynom som passer perfekt til punktene.

Men, vi kan forsøke å finne en tilnærmet løsning. Vi løser oppgaven vha.

minste kvadraters metode Dette er en teknikk for å finne tilnærmede løsninger til systemer som har flere likninger enn ukjente.

Definisjon

$\hat{x}$ er den **minste kvadraters løsning** for $Ax = b$.

Det følgende teoremet forteller oss hvordan vi finner minste kvadraters løsning:

Teorem 12.1 (forkortet)

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Da er mengden av minste kvadraters løsninger for $Ax = b$ lik løsningsmengden for

$$A^T(Ax - b) = 0$$

Hvis $A^T A$ inverterbar, finnes det for enhver b en unik minste kvadraters løsning $\hat{x}$.

Vi ganger ut, flytter over og løser:

$$\begin{aligned} \text{MKM: } & \text{løse } A^T(A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0} \\ & \Leftrightarrow \underbrace{A^T A}_{\text{matrise}} \underbrace{\vec{x}}_{\text{vektor}} = \underbrace{A^T \vec{b}}_{\text{vektor}} \end{aligned}$$

Først litt mellomregning:

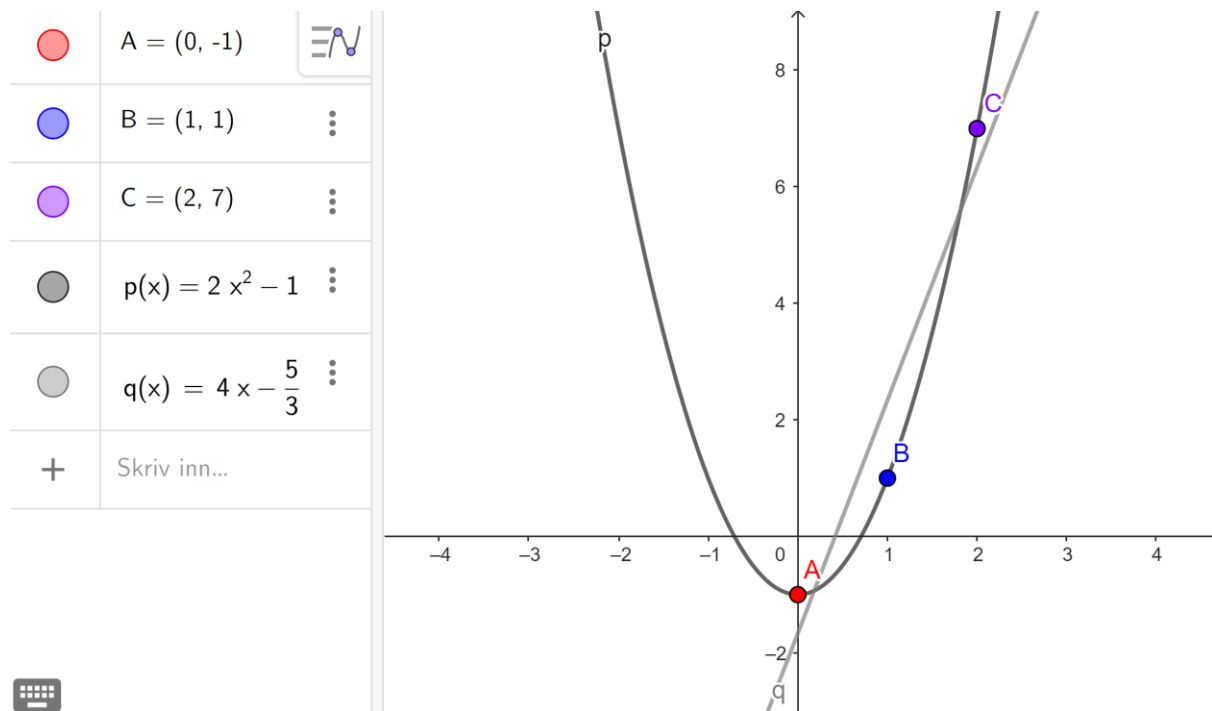
$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^T A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi setter inn for $A^T A$ og $A^T \vec{b}$, og løser systemet ved Gauss-eliminasjon:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 & | & 15 \\ 3 & 3 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & -5/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ e = -5/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{q(x) = 4x - 5/3}$$

c) Tegn grafene til p og q .



Ekstraoppgaver

Oppgave 4

Finn likevektsvektorene for de stokastiske matrisene

a) $C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Først må vi vite hva en sannsynlighetsvektor er, hva en likevektsvektorer er og hva stokastiske matriser er.

Definisjon

En **sannsynlighetsvektor** er en vektor $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \dots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ hvor $0 \leq v_i \leq 1$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og hvor $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$.

$M_{n \times n}$ er en **stokastisk matrise** hvis kolonnene i M er sannsynlighetsvektorer.

Definisjon

M stokastisk matrise.

En **likevektsvektor** $\mathbf{v}$ for M er en vektor som oppfyller følgende betingelser:

- 1) Er en egenvektor for M .
- 2) Har tilhørende egenverdi $\lambda = 1$.
- 3) En sannsynlighetsvektor.

Så, vi må finne egenvektoren som tilhører egenverdien 1. Oppgaveteksten gir at M er stokastisk, og vi antar at den faktisk har 1 som en av egenverdiene (dette kan vi kontrollere senere).

Finne $\vec{v}$ til $\lambda_1 = 1$ s.a. $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$

$$(A - 1I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -0.6 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & -0.9 & 0 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{2} v_3 \\ v_2 = \frac{1}{5} v_3 \\ v_3 = s, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{La } s=1: \vec{v}' = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men når vi sjekker, ser vi at denne vektoren IKKE har kolonnesum lik 1.

Dermed er den heller ikke en likevektsvektor:

$$\vec{v}' \text{ likevektsvektor} \Rightarrow v_1' + v_2' + v_3' = 1$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5} + 1 = \frac{27}{10} \neq 1$$

Vi vet jo at alle skalarmultipler av $\mathbf{v}$ er egenvektorer, så vi kan finne en skalarmultipl $\mathbf{u}$ av $\mathbf{v}'$ som ER en likevektsvektor ved å dele på kolonnesummen, 27/10

$$\text{La } \vec{u} = \frac{\vec{v}'}{27/10} = \frac{10}{27} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/54 \\ 10/135 \\ 10/27 \end{bmatrix}$$

Svar: $\vec{u}$ er en likevektsvektor for systemet

Vi kan også sette prøve på svaret vårt ved å sjekke at $\vec{u}$ faktisk er en egenvektor med egenverdi 1:

$$P: C\vec{u} = 1\vec{u} = \vec{u} \quad \checkmark$$

Eksamen vår 2019

Oppgave 5

Et emne i lineær algebra foreleses i to paralleller, en i S7 og en i S8. Begge foreleserne er like dårlige, og derfor bytter studentene parallell ofte.

Sannsynligheten for at en student bytter parallell etter en gitt forelesningsuke er 40 %.

Bestem en stokastisk matrise M som beskriver denne prosessen. Parallellene er ved semesterstart satt opp med henholdsvis 180 og 140 studenter. Hvordan vil studentene fordele seg etter 14 forelesningsuker? Anta at studentene er svært pliktoppfyllende og at ingen slutter å gå i forelesning.

2 paralleller: S7, S8

$$P(B) = \text{"Sannsyn. for å bytte parallell"} = 0.4$$

Vi setter opp en tabell som viser de mulige utfallene for å finne M :

① Finne M

4 muligheter

Start Går til	S7	S8
S7	S7 → S7	S8 → S7
S8	S7 → S8	S8 → S8

$$M = \begin{bmatrix} P(S7 \rightarrow S7) & P(S8 \rightarrow S7) \\ P(S7 \rightarrow S8) & P(S8 \rightarrow S8) \end{bmatrix}$$

Vi regner ut:

$$P(S7 \rightarrow S7) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(S7 \rightarrow S8) = P(B) = 0.4$$

$$P(S8 \rightarrow S7) = P(B) = 0.4$$

$$P(S8 \rightarrow S8) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Det neste vi skal gjøre er å finne fordelingen etter 14 uker, altså hvor mange studenter som da går i S7 og hvor mange som går i S8:

② Finne fordeling etter 14 uker

$$V. \text{ start : } \begin{cases} 180 \text{ studenter i S7} \\ 140 \text{ studenter i S8} \end{cases}$$

$$\text{Totalt antall studenter : } 180 + 140 = 320$$

Vi setter opp sannsynligheten for at en student går i en gitt parallell ved start:

$$P(S7) = \text{"Sannsyn. for at en student går i S7"} = \frac{180}{320}$$

$$P(S8) = \text{"Sannsyn. for at en student går i S8"} = \frac{140}{320}$$

Dermed kan vi lage sannsynlighetsvektoren x :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 180/320 \\ 140/320 \end{bmatrix} \quad \text{Sannsyn.vektor for fordelingen}$$

Fordelingen etter 14 uker finner vi ved å prikke x med M 14 ganger. Det gjør vi effektivt ved å først diagonalisere M :

$$\text{Fordelingen etter 14 uker : } M^{14} \vec{x}$$

$$\text{Strategi : } M = P D P^{-1}$$

Denne gangen skriver vi bare opp matrisene D , P og P^{-1} , og dere kan selv regne dem ut 😊

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{14} = P D^{14} P^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{14} & 0 \\ 0 & (1/5)^{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$M^{14} \vec{x} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180/320 \\ 140/320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160/320 \\ 160/320 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S7 \\ S8 \end{matrix}$$

Eksamen kont 2018

Oppgave 5

I følge meteorolog Y_r eksisterer det et land N som er velsignet med mange ting, men ikke med solrikt vær. Det er aldri to dager med sol på rad. Dersom det er sol en dag, er det like stor sannsynlighet for at det regner som at det snør påfølgende dag. Dersom det er snø eller regn en dag, er det like stor sannsynlighet for å få det samme været – som å ikke få det samme været – påfølgende dag. Dersom det er en endring fra snø eller regn fra en dag til den neste, er det bare halvparten av gangene sol påfølgende dag.

a) Hva er den stokastiske matrisen for denne markov-kjeden?

MÅh: lage stokastisk matrise

Vi har altså 3 typer vær; sol, regn og snø. Vi forkorter som følger:

$$\begin{cases} S = \text{Sol} \\ R = \text{Regn} \\ I = \text{Snø} \end{cases}$$

Deretter lager vi en tabell av de mulige tilfellene. Merk at $P(R|S)$ leses som «sannsynligheten for at det regner på dag 2, gitt at det var sol på dag 1».

Day 1 Day 2	S	R	I
S	$P(S S)$	$P(S R)$	$P(S I)$
R	$P(R S)$	$P(R R)$	$P(R I)$
I	$P(I S)$	$P(I R)$	$P(I I)$

Vi må nå lese oppgaveteksten nøye for å finne, og eventuelt regne ut sannsynlighetene:

- Først, det er aldri sol to dager på rad, så sannsynligheten for dette er 0:

$$P(S|S) = 0$$

- Hvis det er sol en dag, så er sannsynligheten like stor for at det regner, som for at det snør, på dag 2. Denne verdien er foreløpig ukjent for oss, så vi kaller den bare x :

$$P(R|S) = P(I|S) = x$$

- Hvis det regner på dag 1, så er sannsynligheten like stor for å få det samme været, som å IKKE få det samme været på dag 2. Sannsynligheten $P(R|R)$ er foreløpig ukjent for oss, så vi kaller den y .

$$P(R|R) = P(\bar{R}|R)$$

$$= y$$

- «IKKE regn» betyr enten sol eller snø. Videre, hvis det ER endring i vær, så er det bare halvparten av gangene at det er sol neste dag (rosa). Det eneste gjenværende alternativet er da snø, og da må også denne bli $y/2$ (lilla):

$$P(R|R) = P(\bar{R}|R) = P(S|R) + P(I|R)$$

$$= y \qquad = y/2 \qquad = y/2$$

- Det samme gjelder hvis det er snø på dag 1. Da er det like stor sannsynlighet for å få snø neste dag, som å IKKE få snø neste dag. Verdien y er ukjent for oss:

$$P(I|I) = P(\bar{I}|I)$$

$$= y$$

- Igjen er det slik at hvis det er endring i vær, så er det bare halvparten av gangene at det er sol dagen etter (rosa). Dermed har vi igjen:

$$P(I|I) = P(\bar{I}|I) = P(S|I) + P(R|I)$$

$$= y \qquad = y/2 \qquad = y/2$$

Nå ser tabellen vår slik ut:

Dag 2 \ Dag 1	S	R	I
S	0	$y/2$	$y/2$
R	x	y	$y/2$
I	x	$y/2$	y

Ettersom vi vet at summen av hver kolonne skal være 1, kan vi regne ut verdien til x og y :

$$0 + x + x = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$$

$$y/2 + y + y/2 = 1 \Leftrightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = 0.5 \wedge y/2 = 0.25 = y/2$$

Dermed får vi matrisen:

Dag 2 \ Dag 1	S	R	I
S	0	0.25	0.25
R	0.5	0.5	0.25
I	0.5	0.25	0.5

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

b) På lang sikt, hvor mange dager – av alle (i %) – er det sol?

Så, hvor ofte er det sol? Vi løser oppgaven ved bruk av et teorem:

Teorem 12.1

$M_{n \times n}$ regulær, stokastisk.

Da har M en unik likevektsvektor $\mathbf{q}$.

For enhver utgangssannsynlighetvektor $\mathbf{x}_0$ konvergerer markovkjeden $\{\mathbf{x}_n\}$ til $\mathbf{q}$ når $n \rightarrow \infty$

For å vite om vi kan bruke teoremet, må vi først sjekke at betingelsene er oppfylt (altså om M faktisk er regulær).

PLAN:

① A regulær?

② Finne likevektsvektor for A

Det første vi gjør er å sjekke at M er regulær, og da må vi vite hva det betyr:

Definisjon

En stokastisk matrise M kalles **regulær** hvis det finnes n slik at alle elementene til M^n er strengt positive.

$$\textcircled{1} A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1875 & 0.1875 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.4375 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A$ regulær ✓

Så, alle komponentene er strengt positive og A er regulær.

Deretter finner vi likevektsvektoren med egenverdi $\lambda = 1$, ved å løse følgende homogene likningssystem:

$$\textcircled{2} \lambda_1 = 1 \quad (A - 1I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & -0.5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Vi trenger jo bare én likevektsvektor, så vi kan finne en ved å fikse en s :

$$\text{La } s=1 \Rightarrow \vec{v}' = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men her er kolonnesummen ULIK 1:

$$v'_1 + v'_2 + v'_3 = 0.5 + 1 + 1 = 2.5$$

Vi lager så en likevektsvektor ved å få kolonnesummen til å bli 1. Deretter kan vi lese av hvor ofte det er sol:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}'}{2.5} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} S \\ R \\ I \end{matrix} \Rightarrow \text{Sol 20\% av dagene}$$

Ekstraoppgaver

Oppgave 6

La S være $1 \times n$ -matrisen med 1 i alle kolonnene, dvs. $S = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$.

- a) Forklar hvorfor en vektor x i $\mathbb{R}^n$ er en sannsynlighetsvektor hvis og bare hvis alle koordinatene er ikke-negative og $Sx = 1$.

$$S_{1 \times n} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

a) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Å vise: $\vec{x}$ sannsyn. vektor $\Leftrightarrow \begin{cases} i) x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ ii) S\vec{x} = 1 \end{cases}$

Dette er en «hvis og bare hvis»-påstand, og vi beviser den trinnvis ved å ta den ene retningen først, deretter den andre. Vi begynner med å anta at $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor:

$\Rightarrow$) Vet: $\vec{x}$ sannsyn. vektor
Vil vise: i) og ii)

Definisjon

En **sannsynlighetsvektor** er en vektor $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \dots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ hvor $0 \leq v_i \leq 1$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og hvor $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$.

$M_{n \times n}$ er en **stokastisk matrise** hvis kolonnene i M er sannsynlighetsvektorer.

At $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor betyr *per definisjon* at alle koordinatene er mellom 0 og 1. Dermed er de også ikke-negative, og punkt i) er bevist:

$\vec{x}$ sannsyn. vektor $\xRightarrow{\text{def}} 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 $\Rightarrow x_i \geq 0$ — " —
i) OK

Vi vet fortsatt at $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor, men nå ønsker vi å vise punkt ii), altså at $S\mathbf{x} = 1$:

ii) Vil vise: $S\vec{x} = 1$

Vi regner ut $S\mathbf{x}$ og observerer at dette blir summen av koordinatene i $\mathbf{x}$:

$$\circledast \quad S\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Summen av koordinatene til $\mathbf{x}$ er 1, per definisjon av sannsynlighetsvektor (slik $\mathbf{x}$ er):

$$= \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

↓
1

ii) OK

Dermed er også punkt ii) bevist. Vi beviser nå den andre retningen. Denne gangen antar vi at alle koordinatene er ikke-negative og at $S\mathbf{x} = 1$. Ut fra dette skal vi nå bevise at $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor (Ikke gjennomgått):

($\Leftarrow$ Ver: i) $x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
ii) $\sum x = 1$

Vil vise: $\vec{x}$ sannsyn. vektor

Å vise at $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor innebærer 2 ting:

- 1) Vi må vise at alle koordinatene er mellom 0 og 1.
- 2) Vi må vise at summen av koordinatene er 1.

Vil vise: $\vec{x}$ sannsyn. vektor $\left\{ \begin{array}{l} 1) 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 2) x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{array} \right.$

Vi starter med punkt 2. Vi vet jo at $S\mathbf{x} = 1$, og vi har regnet ut $S\mathbf{x}$ til å være summen av koordinatene til $\mathbf{x}$. Dermed er punkt 2 bevist:

Nă vet vi at $\left. \begin{array}{c} S \vec{x} = 1 \\ \parallel \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{2) \sigma_e}}$

Vi vet per antakelse i) at alle koordinatene til $\mathbf{x}$ er ikke-negative. Per antakelse ii) vet vi også at $S\mathbf{x} = \mathbf{1}$. Sammen gir disse at alle koordinatene til $\mathbf{x}$ er mellom 0 og 1:

$\forall i$ vel at $x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oa $\vec{s} = 1$
 $\parallel$
 $x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Jil samme gir disse at $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 1) ou

□

b) La P være en stokastisk $n \times n$ -matrise. Vis at $SP = S$. (Ikke gjennomgått)

b) Vet: $P_{n \times n}$ stochastisch

Vil vise: $SP = S$

Beweis:

At P er stokastisk, betyr per definisjon at kolonnene er sannsynlighetsvektorer:

$$P_{n \times n} \text{ stokastisk} \xRightarrow{\text{pr def}} P = [\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \dots \ \vec{p}_n]$$

hvor $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$
sannsyn. vektorer

Vi regner ut produktet SP :

$$SP = [1 \ 1 \ \dots \ 1] [\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \dots \ \vec{p}_n]$$

Resultatet blir en $1 \times n$ -matrise hvor kolonnene er summen av koordinatene til henholdsvis $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$.

$$= \left[\sum_{i=1}^k p_{1i} \quad \sum_{i=1}^k p_{2i} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^k p_{ni} \right]$$

Ettersom $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ alle er sannsynlighetsvektorer, er summen av koordinatene i hver kolonne lik 1:

$$= [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

for $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ sannsyn. vektor

Dermed er SP lik matrisen S :

$$= S \quad \square$$