Plenumsregning 12: System av differensiallikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

Finn generell løsning av $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix} \qquad A\vec{y} = \vec{y}' \qquad (A\vec{y}(t) = \vec{y}'(t))$$

A er altså en reell 3×3-matrise. Vi antar nå at A er diagonaliserbar. Da vet vi at det finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A (dette var et resultat fra kapittelet om diagonalisering):

$A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Anta A diag. bar $\Rightarrow \exists$ basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A

Vi antar nå at $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for A med tilhørende egenverdi λ og setter $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$:

$\vec{v}$ egenvektor m. egenverdi λ, $\quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$

Rimelig gjett ettersom diff.likningen $y' = \lambda y$ har løsning $y(t) = Ce^{\lambda t}$.

Deretter deriverer vi $\boldsymbol{y}(t)$ og benytter oss av:

- definisjonen av egenvektor
- At $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}$

$$\vec{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}\underbrace{\lambda\vec{v}}_{A\vec{v}} = e^{\lambda t}A\vec{v} = A\underbrace{(e^{\lambda t}\vec{v})}_{=\vec{y}(t)} = A\vec{y}(t)$$

Deretter observerer vi at $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$ (altså differensiallikningen vår). Dette betyr at $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}$ er en løsning av differensiallikningen:

$\Rightarrow \vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) \Rightarrow \vec{y}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ er en løsning av diff.likn.

Mengden av alle løsninger til $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$ utgjør et reelt vektorrom (dette er vist i forelesningsvideoene). Dermed vet vi at lineærkombinasjoner av løsninger også er løsninger.

Mengden av løsninger til $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ er et reelt vektorrom

$\Rightarrow$ lin. komb. av løsn. er også løsn.

Dette utgjør Teorem 13.8 fra kapittelnotatene:

Teorem 13.8

> $A_{n\times n}$ diagonaliserbar,
>
> $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lin.uavh. egenvektorer med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da er
>
> $$\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}$$
>
> en basis for løsningsrommet til $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$. Dvs.
>
> $$c_1\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}$$
>
> en generell løsning av $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$.

Lin.komb. av vektorene

Plan: ① Finne λ_i-ene

② Finne $\vec{v}_i$-ene

③ Thm 13.8: Gen. løsn.

Vi begynner med å finne **egenverdiene** til A som røttene til det karakteristiske polynomet (utregning krever polynomdivisjon!), og **egenvektorene** som løsninger av de homogene likningssystemene:

① $\det(A - \lambda_i I) = 0$ ② $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$ for $i \in \{1,2,3\}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deretter setter vi inn i likningen fra Teorem 13.8 for å finne den generelle løsningen av systemet av diff.likninger:

③ Thm 13.8: $\vec{y}(t) = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\vec{v}_3 e^{\lambda_3 t}$

$$\underline{\vec{y}(t) = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + c_3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}}$$

Koeffisientene c_1, c_2, c_3 kommer fra eventuelle initialbetingelser, men det har vi altså ikke enda. Dette blir tema for neste oppgave.

Oppgave 3

Løs initialverdiproblemene $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrise A er fremdeles lik som i oppgave 2, men nå har vi i tillegg fått en initialverdibetingelse:

Mål: Løse IVP $A\vec{y} = \vec{y}'$ m. $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c_1, c_2, c_3 = ?$

I forrige oppgave fant vi den generelle løsningen, $\boldsymbol{y}(t)$. Nå lurer vi på hva koeffisientene, c_1, c_2 og c_3 er, og vi skal bruke IVB til å finne ut av det. Vi setter inn for $t = 0$ og setter uttrykket lik $[1 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2\cdot 0} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4\cdot 0} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3\cdot 0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$e^0 = 1$

$$\Leftrightarrow c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2 \end{cases}$$

Den spesielle/partikulære løsningen blir da:

Spesiell løsn. $$\underline{\vec{y}(t) = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}}$$

Oppgave 1

Finn generell løsning av systemet $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ og skissér faseplottet når

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{y}\,' = A\vec{y} \qquad A_{2\times 2}$$

Vi skal skissere faseplottet til A. Det gjør vi ved å først finne den generelle løsningen til likningssystemet. Den generelle løsningen er jo, som kjent, avhengig av egenverdiene og egenvektorene til matrisen, så vi må finne dem.

Gen. løsn. $\vec{y}(t) = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$

Vi har 3 mulige tilfeller avhengig av egenverdiene til A:

3 muligheter:

I) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 \neq \lambda_2$

II) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 = \overline{\lambda}_2$

III) $\lambda \in \mathbb{R}$

Husk: Egenverdiene er røttene til det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi regner ut disse først, og så ser vi hvilket tilfelle vi havner i:

1 $\det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Tilfelle I)

Vi har altså to distinkte reelle egenverdier og befinner oss i **tilfelle I**.

Vi finner så de tilhørende egenvektorene:

2 $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$ for $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Den generelle løsningen er altså:

3 Gen. løsn. $\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$

Når vi nå skal tegne fasediagrammet bruker vi følgende tabell (se kapittelnotatene s. 5):

Fasediagram: To distinkte, reelle røtter

$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{e^{\lambda t}}$	$\boldsymbol{ve^{\lambda t}}$
$>\mathbf{0}$ (pos.)	øker	bort fra origo
$=\mathbf{0}$	konstant	står i ro
$<\mathbf{0}$ (neg.)	minker	mot origo

- Hvis λ er positiv, vil $e^{\lambda t}$ øke, og da vil leddet $\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ bevege seg vekk fra origo.
- Hvis $\lambda = 0$, vil $e^{\lambda t}$ være konstant, og da vil leddet $\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ stå i ro.
- Hvis λ er negativ, vil $e^{\lambda t}$ minke, og da vil leddet $\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ bevege seg mot origo.

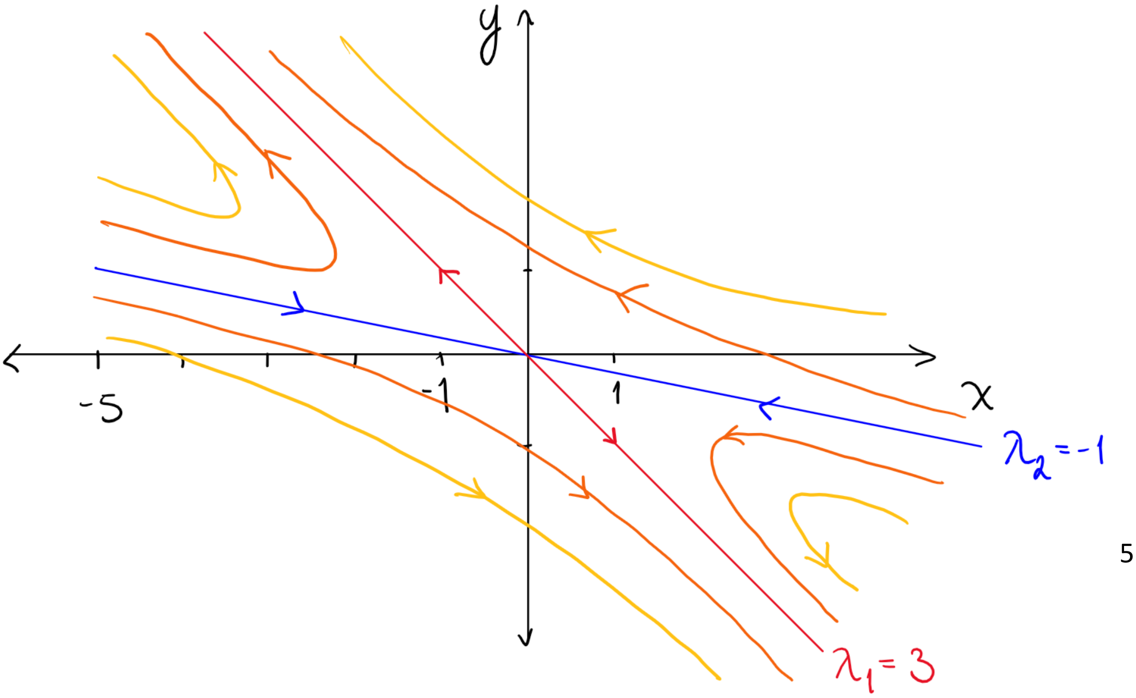
Vi har én positiv og én negativ egenverdi:

$\lambda_1 = 3 > 0 \Rightarrow e^{3t}$ øker $\Rightarrow \vec{v}_1 e^{3t}$ går <u>bort</u> fra origo

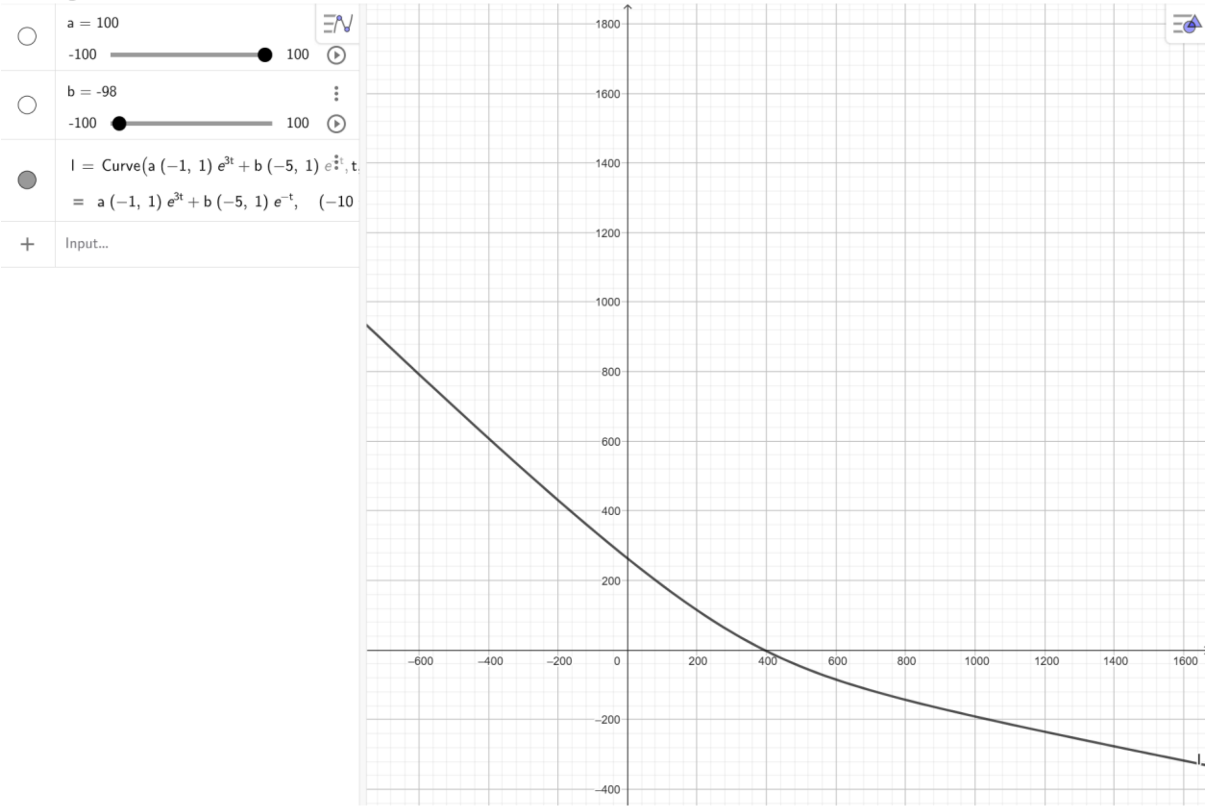
$\lambda_2 = -1 < 0 \Rightarrow e^{-t}$ minker $\Rightarrow \vec{v}_2 e^{-t}$ går <u>mot</u> origo

Hvordan tegne diagrammet i dette tilfellet:

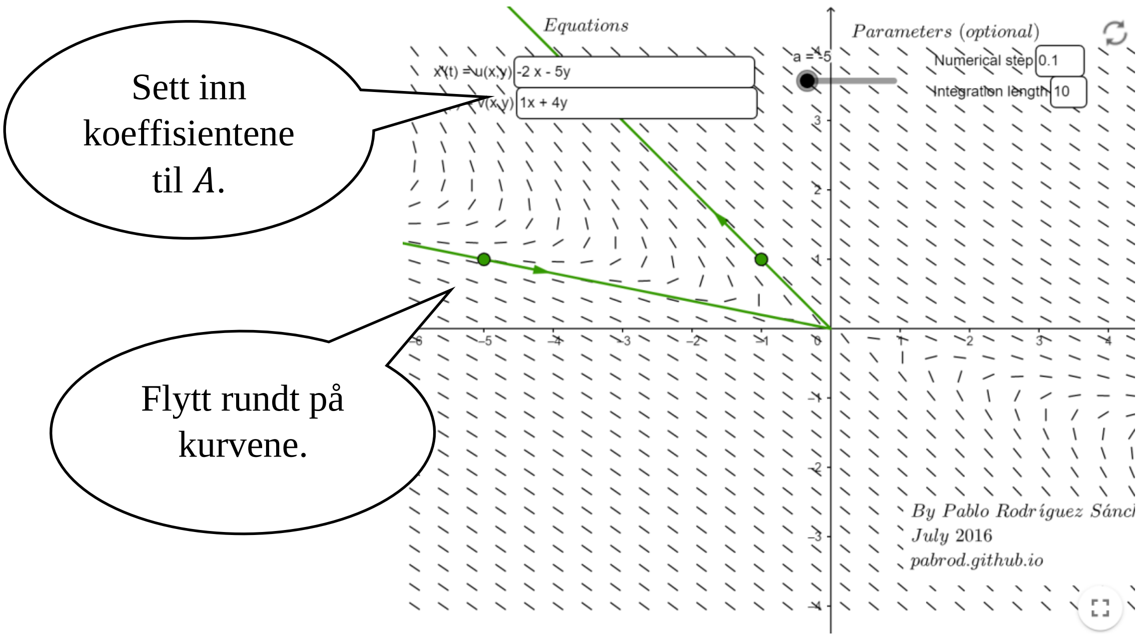
- Tegn egenvektorene og linjer gjennom egenvektorene. Disse svarer til initialbetingelsene $(c_1 = 1, c_2 = 0)$ og $(c_1 = 0, c_2 = 1)$.
- Tegn inn deres bevegelser (bort fra/mot origo) som piler.
- Med en positiv og en negativ egenverdi vil de røde og de blå kurvene gå i motsatt retning. Dette gir oss en slags sadel.
- Vi kan tegne flere kurver (tilsvarende ulike initialbetingelser) ved å «følge bevegelsen til pilene».



Vi kan visualisere effekten av ulike initialbetingelser ved å lage glidere i Geogebra:



Vi kan også skissere faseplottet i GeoGebra for å se løsningene samtidig (https://www.geogebra.org/m/utcMvuUy):



b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Vi begynner med å finne den generelle løsningen vha. egenverdiene og egenvektorene til matrisen. Denne gangen går vi gjennom utregningen for egenverdiene for repetisjon:

1 $\det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right| = (1-\lambda)(-3-\lambda) - (-2)3$

$= \lambda^2 + 2\lambda + 3$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$

abc-formel

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_2 = -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$

$z = \alpha + \beta i$

Vi har altså to forskjellige komplekse egenverdier som er hverandres kompleks-konjugerte. Vi finner så egenvektorene:

2 $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$ for $i \in \{1, 2\}$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 + i\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 - i\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$

Nå har vi *komplekse* egenverdier, og da blir ting noe annerledes for den generelle løsningen:

Teorem 13.16

$\alpha + i\beta \neq 0$ kompleks egenverdi for A, $\boldsymbol{v}$ tilhørende egenvektor.

Da danner

$$\boldsymbol{y}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \cdot \cos(\beta t) - \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) \cdot \sin(\beta t))$$

og

$$\boldsymbol{y}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \cdot \sin(\beta t) + \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) \cdot \cos(\beta t))$$

en basis for reelt løsningsrom til

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$$

Her kan vi velge den ene eller den andre egenverdien, men men det er vanlig å velge den med positiv imaginær del. Den reelle og imaginære delen av den tilhørende egenvektoren er da:

$$Re(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Im(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \overset{\alpha}{-1} + i\overset{\beta}{\sqrt{2}}$$

Thm 13.16

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{y}_1(t) = e^{-t}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}t)\right) \\ \vec{y}_2(t) = e^{-t}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}t) + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t)\right) \end{cases}$$

Basisen for løsningsrommet er altså reell. Den generelle løsningen som følger med $\boldsymbol{y}_1$ og $\boldsymbol{y}_2$ som ovenfor:

$$\Rightarrow \underline{\vec{y}(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t)}$$

Siden cosinus og sinus er involvert i løsningene, gir det mening at vi får en slags bølgende/sirkulær bevegelse. Vi setter opp en tilsvarende tabell som i stad (se kapittelnotater s. 7):

Fasediagram: To distinkte, komplekse røtter

$$z = \alpha + \beta i, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$\boldsymbol{\alpha}$	bevegelse
$> \mathbf{0}$ (pos.)	spiral <u>bort</u> fra origo
$= \mathbf{0}$	sirkulær
$< \mathbf{0}$ (neg.)	spiral <u>mot</u> origo

- Hvis α-leddet er positivt beveger spiralen seg <u>bort</u> fra origo.
- Hvis α-leddet er 0 har vi en sirkulær løsning.
- Hvis α-leddet er negativt beveger spiralen seg <u>mot</u> origo.

Vi er i sistnevnte tilfellet fordi $\alpha = -1$:

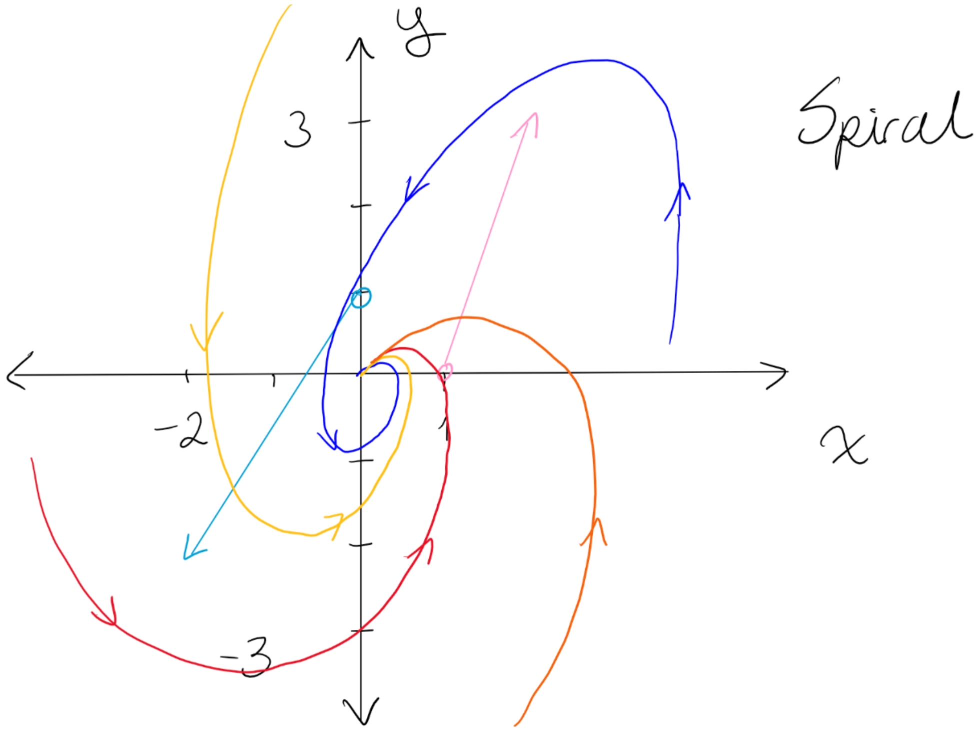
$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2} \Rightarrow \alpha < 1 \Rightarrow \text{spiral } \underline{\text{mot}} \text{ origo}$$

Løsningene kommer altså til å bevege seg i spiraler mot origo. Men hvilken vei?

- Vi regner ut $\boldsymbol{Au}$ for ulike punkter, gjerne $(1\ 0)^T$ og $(0\ 1)^T$, og tegner inn de resulterende vektorene (disse representerer den deriverte eller tangentvektoren) som piler i punktene.
- Løsningene vil følge retningen til de ovennevnte pilene.

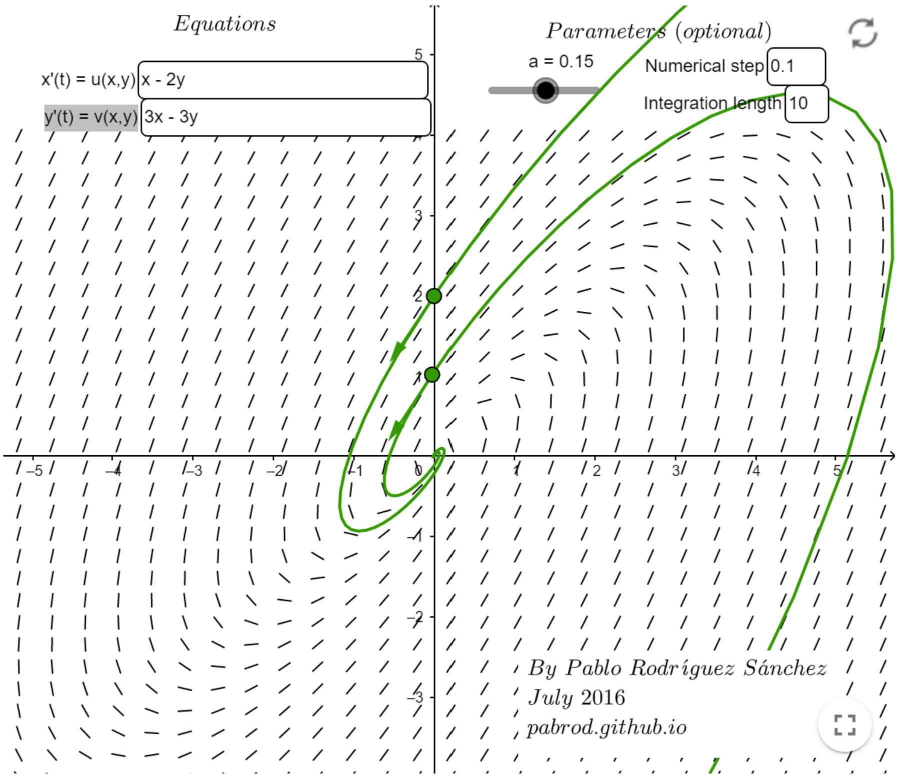
$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



Igjen, ulike kurver kommer av ulike initialbetingelser.

Vi kan gjerne skissere løsningene i GeoGebra også:



Oppgave 8

Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$$

Med en gitt initialverdi $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

$$A\vec{y} = \vec{y}' \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

MÅL: Vise at $A\vec{y} = \vec{y}'$ m. IVB $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ har ENTYDIG LØSNING (nøyaktig én løsning for c_1, c_2, c_3)

Vi vet at den generelle løsningen avhenger av disse koeffisientene:

Gen. løsn. $\vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{v}_3 e^{\lambda_3 t}$

PLAN:
1. Finne gen. løsn. $\vec{y}(t)$
2. Bruke IVB: $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$
3. Bruke et teorem

1. $\det(A - \lambda I) = 0 \iff (\lambda - 2)^2(\lambda + 4) = 0$

Husk: Dersom λ_i er en egenverdi til A, er den **algebraiske multiplisiteten** til λ_i lik dens orden (altså eksponenten) som rot i $\det(A - \lambda I_n)$.

Den **geometriske multiplisiteten** til en egenverdi er antall lineært uavhengige egenvektorer assosiert med den, dvs. dimensjonen til nullrommet av $(A - \lambda I_n)$.

Husk: Geo.mult $\leq$ Alg.mult.

Altså, egenverdien 2 har algebraisk multiplisitet to. Ved å løse det homogene likningssystemet finner vi to tilhørende lin.uavh. egenvektorer:

$\lambda_1 = 2$ alg. mult. 2 → 2 lin. uavh. egenvektorer

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -4$ alg. mult. 1 → 1 lin. uavh. egenvektor

$$(A - \lambda_3 I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nå når vi har egenverdiene og egenvektorene har vi alt vi trenger for å skrive opp den generelle løsningen:

$$\text{Gen. løsn. } \vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

Vha. IVB-en kan vi lage et likningssystem for å bestemme koeffsientene c_1, c_2 og c_3:

(2) $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{B} \vec{c} = \vec{y}_0 \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Det vi nå ønsker å vise er at det finnes kun ett mulig sett av c_1, c_2 og c_3. For å vise det skal vi tilbake til noen av de ekvivalente påstandene i Yndlingsteoremet vårt. Vi finner det forøvrig også i kapittelnotatene som Teorem 4.20:

Teorem 4.20 + 6.12 (utdrag fra «Yndlingsteoremet»)

$A_{n\times n}$, $\boldsymbol{b}_{n\times 1}$ vektor

i) A inverterbar $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en entydig løsning.
ii) A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$\det(B) = -6 \neq 0 \Longrightarrow$ B inverterbar

$\Rightarrow B\vec{c} = \vec{y}_0$ har en ENTYDIG LØSNING

↳ M.a.o $\exists$ c_1, c_2, c_3 UNIKE skalarer som løser systemet

Eksamen høst 2018

Oppgave 3

Finn generell løsning av systemet

$$y_1' = 7y_1 - 2y_2$$
$$y_2' = 2y_1 + 2y_2$$

og skissér fasediagrammet.

$$y_1' = 7y_1 - 2y_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}}_{\vec{y}\,'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$
$$y_2' = 2y_1 + 2y_2$$

Mål: 1 Finne gen. løsn.

2 Skissere fasediagram

1 $\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - 6I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gen. løsn. $\underline{\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}}$

2 Fasediagram

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Fasediagram: To distinkte, reelle røtter

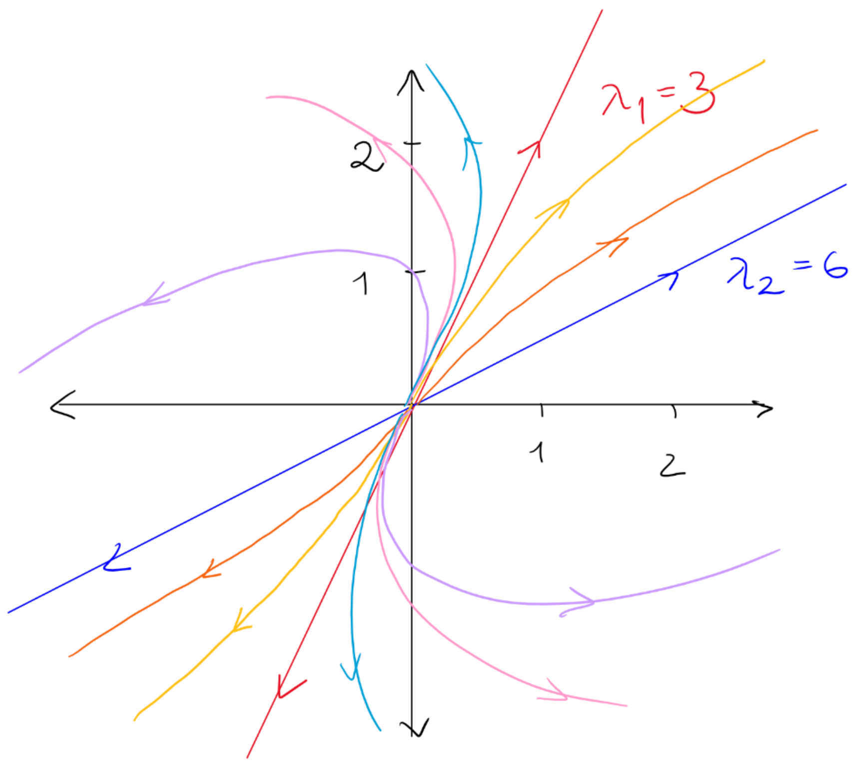
λ	$e^{\lambda t}$	$ve^{\lambda t}$
> 0	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0	minker	mot origo

$\lambda_1 = 3 > 0 \Rightarrow e^{3t}$ øker $\Rightarrow \vec{v}_1 e^{3t}$ går bort fra origo

$\lambda_2 = 6 > 0 \Rightarrow e^{6t}$ øker $\Rightarrow \vec{v}_2 e^{6t}$ ——"——

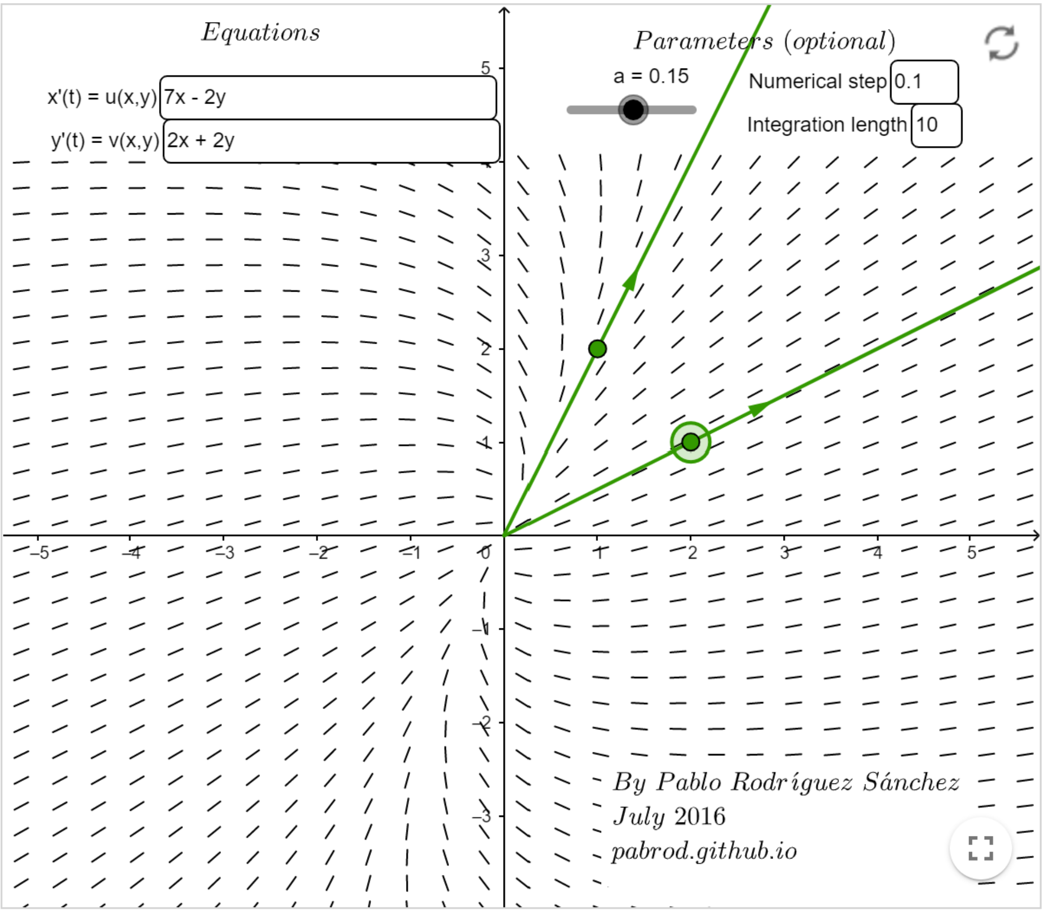
For å tegne fasediagrammet:

- Tegn inn linjer gjennom egenvektorene (rød og blå).
- Tegn inn bevegelsen til linjene (vha. tabellen ovenfor).
- Ettersom $e^{6t} > e^{3t}$ vil løsningene tendere mot $v_2 e^{6t}$ (altså bevege seg mot den blå kurven) med økende t.



$e^{6t} > e^{3t}$

Igjen kan GeoGebra være et fint hjelpemiddel for å skissere løsningene. Tips: Flytt på prikkene for å se bevegelsene.



Eksamen vår 2017

Oppgave 6 (Ikke gjennomgått)

La $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

La $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

Vi finner egenverdiene til A som røttene til det karakteristiske polynomet:

① $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$

Deretter finner vi egenverdiene som løsninger av de homogene likningssystemene:

② $(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$ for $i \in \{1,2\}$

$\begin{cases} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix}150\\50\end{bmatrix}$$

og finn $\boldsymbol{x}(5)$.

Løs IVP $\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t)$ m. $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix}150\\50\end{bmatrix}$

Fra a) har vi all infoen vi trenger for å kunne skrive opp den generelle løsningen til IVP:

Gen. løsn. $\vec{x}(t) = c_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}e^{-t} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-6t}$

Vi bruker initialverdibetingelsen $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix}150\\50\end{bmatrix}$ og får:

$$\vec{x}(0) = c_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\underbrace{e^{-0}}_{=1} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\underbrace{e^{-6\cdot 0}}_{=1} = \begin{bmatrix}150\\50\end{bmatrix}$$

Dette gir oss et likningssystem med 2 ukjente, c_1 og c_2:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 150\\2 & 1 & 50\end{array}\right] \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 40\\0 & 1 & -30\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases}c_1 = 40\\c_2 = -30\end{cases}$$

Vi setter inn for c_1 og c_2 og finner den spesielle løsningen:

Spesiell løsn. $\underline{\vec{x}(t) = 40\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}e^{-t} - 30\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-6t}}$

Til slutt finner vi $\boldsymbol{x}(5)$:

$$\vec{x}(5) = 40\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}e^{-5} - 30\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-6\cdot 5} \approx \underline{\underline{\begin{bmatrix}0.81\\0.54\end{bmatrix}}}$$