

Plenumsregning 13: Andre ordens differensiallikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 1-2 c)

Gitt følgende andreordens differensiallikning

$$y'' + y = 0$$

En modifisert oppgave 😊

i. Skriv om til et system av førsteordens differensiallikninger.

$$y''(t) + y(t) = 0 \rightsquigarrow y''(t) = -y(t) \quad (*)$$

Vi ønsker nå å skrive om dette til et system av førsteordens diff.likninger. Det gjør vi ved å definere $x_1(t) = y(t)$ og $x_2(t) = y'(t)$:

$$\begin{aligned} \text{La } x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \end{aligned}$$

Vi deriverer og gjenkjenner at:

- $x_1'(t) = y'(t)$ er det samme som $x_2(t)$
- $x_2'(t) = y''(t) = -y(t)$ (snu på original likning).

$$\begin{aligned} \text{Da } \underline{x_1'(t)} &= y'(t) = \underline{x_2(t)} \\ \underline{x_2'(t)} &= \underbrace{y''(t)}_{\uparrow} = -y(t) = -\underline{x_1(t)} \end{aligned} \quad (*)$$

Vi skriver nå $x_1'(t)$ og $x_2'(t)$ som lineærkombinasjoner av $x_1(t)$ og $x_2(t)$.
Dermed får vi et 2×2 -likningssystem:

$$\begin{aligned} \text{Dermed } x_1'(t) &= 0 \cdot x_1(t) + 1 \cdot x_2(t) \\ x_2'(t) &= -1 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(t)}$$

ii. Finn en generell basis for løsningsrommet og skriv generell løsning.

Vi skal bruke et teorem gjennomgått i forelesningsvideoene (og i forelesningsnotatene) til å løse oppgaven.

En modifisert
oppgave 😊

Teorem 14.2 (forkortet)

Løsningsmengden til en homogen, annenordens differensiallikning

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt, reelt vektorrom utspent av to lineært uavhengige funksjoner. Vi har 3 ulike tilfeller:

- | | |
|---|---|
| 1) $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ | hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ |
| 2) $y_1(t) = e^{at} \cos(bt)$ og $y_2(t) = e^{at} \sin(bt)$ | hvis $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ |
| 3) $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = t e^{\lambda t}$ | hvis $\lambda \in \mathbb{R}$ |

Strategi: ① Finne λ_i -ene
② Bruke teoremet

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -1$$

$$z = a + bi$$

$$a = 0, b = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i \end{cases}$$

Basis

$$y_1(t) = e^{at} \cos(bt) = \cos(t)$$

$$y_2(t) = e^{at} \sin(bt) = \sin(t)$$

Fra teoremet vet vi at den generelle løsningen må være en lineærkombinasjon av løsningene. Dermed er den generelle løsningen:

$$\text{Gen. løsn. } y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \underline{\underline{c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)}}$$

Oppgave 3 b)

Finn en partikulær løsning for

$$y'' + y = \cos(t)$$

I forrige oppgave så vi på en *homogen* andreordens diff.likning. Nå ser vi på en *inhomogen* andreordens diff.likningen:

$$y''(t) + y(t) = \cos(t)$$

Teorem 14.6 (omskrevet)

Alle løsninger til den inhomogene likningen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

er på formen

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

der $y_p(t)$ er en partikulær løsning og $y_h(t)$ er en løsning til den tilsvarende homogene likningen.

$y_1(t)$ og $y_2(t)$ finner vi i den generelle løsningen for den homogene diff.likningen:

$$\text{Fra forrige oppgave: } y_h(t) = \underbrace{c_1 \cos(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{c_2 \sin(t)}_{y_2(t)}$$

For å finne en partikulær løsning, $y_p(t)$, bruker vi formelen i forelesingsnotatene (s. 3-4):

For en *inhomogen*, *annenordens differensiallikning*, dvs. en likning på formen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

kan vi finne en **partikulær løsning**, y_p , ved hjelp av følgende formel:

$$y_p(t) = y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt - y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt$$

Vi skriver opp alle ledd vi skal fylle inn i formelen:

$$\begin{aligned} \text{Her: } f(t) &= \cos(t) \\ y_1(t) &= \cos(t) & y_2(t) &= \sin(t) \\ y_1'(t) &= -\sin(t) & y_2'(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

Deretter setter vi inn i formelen for $y_p(t)$:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sin(t) \int \frac{\cos(t) \cdot \cos(t)}{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))} dt \\ &\quad - \cos(t) \int \frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))} dt \\ &= \sin(t) \int \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt - \cos(t) \int \frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \end{aligned}$$

Herfra må vi bruke flere trigonometriske identiteter:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

Dermed blir nevnerne 1 og, vi kan se bort fra dem:

$$= \sin(t) \int \underbrace{\cos^2(t)} dt - \cos(t) \int \underbrace{\sin(t)\cos(t)} dt$$

Vi vet at:

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$$

$$\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Vi setter inn i uttrykket for $y_p(t)$ og får at:

$$\begin{aligned} (*) &= \sin(t) \int \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1) dt - \cos(t) \int \frac{1}{2}\sin(2t) dt \\ &= \sin(t) \left(\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} \right) + \cos(t) \cdot \frac{1}{4}\cos(2t) \\ &= \frac{1}{4}\sin(t) \cdot \sin(2t) + \frac{t}{2}\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(t)\cos(2t) \\ &= \frac{1}{4}(\underbrace{\sin(t) \cdot \sin(2t)} + \underbrace{\cos(t) \cdot \cos(2t)}) + \frac{t}{2}\sin(t) \quad (***) \end{aligned}$$

Vi vet at:

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2(t)$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{**} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sin(t) \cancel{2 \sin(t) \cos(t)} + \cos(t) (1 - \cancel{2 \sin^2(t)}) \right) + \frac{t}{2} \sin(t) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cancel{\cos(t) 2 \sin^2(t)} + \cos(t) - \cancel{\cos(t) 2 \sin^2(t)} \right) + \frac{t}{2} \sin(t) \\ &= \frac{1}{4} \cos(t) + \frac{1}{2} t \sin(t) \end{aligned}$$

Ettersom $\frac{1}{4} \cos(t)$ er en homogen løsning (vi kan velge $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0$) vil en partikulær løsning være $\frac{1}{2} t \sin(t)$.

Siden gen. løsn. er på formen $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ og $\frac{1}{4} \cos(t)$ er en homogen løsn. ($c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0$), vil $\frac{1}{2} t \sin(t)$ være en partikulær løsning.

Eksamen høst 2019

Oppgave 2

Finn løsningen til initialverdi problemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$$

$$\text{IVB: } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Løsningsfunksjonen er summen av homogen og partikulær løsning:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Vi begynner med å finne den generelle løsningen til den homogene likningen:

$$\textcircled{1} \quad y_h(t) = ?$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Den karakteristiske likningen er:

$$\text{Kar. likn. } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Vi husker teorem 14.2 som ga oss løsningsmengden (løsningsfunksjonene). Vi er i tilfelle 1:

Teorem 14.2 (forkortet)

Løsningsmengden til en homogen, annenordens differensiallikning

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt, reelt vektorrom utspent av to lineært uavhengige funksjoner. Vi har 3 ulike tilfeller:

- | | |
|---|---|
| 4) $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ | hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ |
| 5) $y_1(t) = e^{at} \cos(bt)$ og $y_2(t) = e^{at} \sin(bt)$ | hvis $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ |
| 6) $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = t e^{\lambda t}$ | hvis $\lambda \in \mathbb{R}$ |

Dermed er den homogene løsningen:

$$\Rightarrow y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = \underline{c_1 e^t + c_2 e^{2t}}$$

Før vi finner koeffisientene (vha. IVB-ene) skal vi finne en partikulær løsning. Ettersom det inhomogene leddet (e^{2t} , se oppgaveteksten) er en homogen løsning er det ikke så lett å gjette seg til en løsning. Derfor skal vi, denne gangen, benytte formelen:

$$y_p(t) = y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt - y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt$$

Vi skriver opp alle ledd vi skal sette inn:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda_1 t} = e^t \\ y_1' &= e^t \\ f(t) &= e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{\lambda_2 t} = e^{2t} \\ y_2' &= 2e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= y_2 \int \frac{y_1 f(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dt - y_1 \int \frac{y_2 f(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dt \\
&= e^{2t} \int \frac{e^t \cdot e^{2t}}{e^t 2e^{2t} - e^{2t} e^t} dt - e^t \int \frac{e^{2t} \cdot e^{2t}}{e^t 2e^{2t} - e^{2t} e^t} dt \\
&= e^{2t} \int \frac{e^{3t}}{2e^{3t} - e^{3t}} dt - e^t \int \frac{e^{4t}}{2e^{3t} - e^{3t}} dt \\
&= e^{2t} \int 1 dt - e^t \int e^t dt \\
&= t e^{2t} - e^{2t}
\end{aligned}$$

Homogen løsning

Vi husker at e^{2t} er en **homogen løsning**, så vi kan se bort fra dette leddet.

Dermed står vi igjen med følgende:

$$y(t) = \underline{c_1 e^t + c_2 e^{2t} + t e^{2t}}$$

Vi bruker så initialverdibetingelsene til å finne koeffisienter c_1 og c_2 :

$$\text{IVB: } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{2 \cdot 0} + 0 e^{2 \cdot 0} = 1 \Rightarrow \underline{c_1 + c_2 = 1}$$

$$y'(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + e^{2t} + 2t e^{2t}$$

$$y'(0) = c_1 e^0 + 2c_2 e^{2 \cdot 0} + \underbrace{e^0}_{=1} + \underbrace{2 \cdot 0 e^{2 \cdot 0}}_{=0} = 1 \Rightarrow c_1 + 2c_2 + 1 = 1$$

$$\underline{c_1 + 2c_2 = 0}$$

Vi får altså et likningssystem med 2 likninger og 2 ukjente som vi kan løse:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Vi setter inn i uttrykket for $y(t)$ og finner løsningsfunksjonen for initialverdiproblemet vårt:

$$\Rightarrow \underline{y(t) = 2e^t - e^{2t} + te^{2t}}$$

Oppgave 2 a) (ikke gjennomgått)

Finn to lineært uavhengige løsninger av den homogene differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

MAh: Finn 2 lin. uavh. løsn.

Strategi: Finn λ_i -er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

abc-formel

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i \\ \lambda_2 = -1 - i \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = a + bi \\ a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

$y_1(t)$ og $y_2(t)$ er to lineært uavhengige løsninger. Disse er på følgende form (ref Teorem 14.2) og vi setter inn for $a = -1$ og $b = 1$:

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{at} \cos(bt) = \underline{e^{-t} \cos(t)} \\ y_2(t) = e^{at} \sin(bt) = \underline{e^{-t} \sin(t)} \end{cases} \quad 2 \text{ lin. uavh. løsn.}$$

Eksamen høst 2017

Oppgave 4

Likningen for en udempet tvungen harmonisk bevegelse er gitt ved

$$y''(t) + y(t) = \cos(t - 2)$$

a) Finn den generelle løsningen til den homogene likningen.

$$y''(t) + y(t) = \cos(t-2)$$

I oppgave a) skal vi finne den generelle løsningen til den homogene likningen. Den homogene likningen er

$$\text{Hom. likn. } y_h''(t) + y_h(t) = 0$$

I tråd med Teorem 14.2 finner vi først egenverdiene for så å skrive opp den generelle, homogene løsningen:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \xRightarrow[\text{Thm 14.2}]{} y_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene likningen.

Nå skal vi finne den generelle løsningen til den *inhomogene* likningen, altså til:

$$y''(t) + y(t) = \cos(t-2)$$

Vi husker at den generelle løsningen av den inhomogene likningen er summen av homogen og partikulær løsning:

$$\text{Gen. løsn. } y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Den generelle løsningen av det homogene problemet fant vi i a), så det holder å finne en partikulær løsning.

$$\hookrightarrow \text{Nå å finne } y_p(t)$$

I en tidligere oppgave brukte vi formelen fra forelesningsnotatene, men den er ikke så lett å huske... Derfor skal vi nå bruke en annen strategi – Vi skal nemlig gjette på en løsning av samme type som $f(t)$. Dette kalles **ubestemte koeffisienters metode**.

Strategi: Gjett $y_p(t) = a \cos(t-2) + b \sin(t-2)$

Vi finner $y_p''(t)$:

$$y_p''(t) = -a \cos(t-2) - b \sin(t-2)$$

$$y'' + y = \underbrace{\cos(t-2)}_{f(t)}$$

$$\underbrace{-a \cos(t-2) - b \sin(t-2) + a \cos(t-2) + b \sin(t-2)}_{=0} \stackrel{?}{=} \underbrace{\cos(t-2)}_{\text{Ikke alltid 0}} \quad \nearrow$$

Men nå vil venstre side av likningen alltid være 0 (dvs. uavhengig av t), altså ikke $\cos(t-2)$ (som ikke alltid er 0). Dermed funker ikke denne $y_p(t)$ -en. Vi må gjette noe annet. Vi legger til en faktor t i hvert ledd og prøver på nytt:

Prøver $y_p(t) = at \cos(t-2) + bt \sin(t-2)$

$$y_p''(t) = -2a \sin(t-2) - at \cos(t-2) + 2b \cos(t-2) - bt \sin(t-2)$$

Vi setter inn for y_p og y_p'' i den opprinnelige differensiallikningen:

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &\stackrel{?}{=} \cos(t-2) \\ -2a \sin(t-2) - at \cos(t-2) + 2b \cos(t-2) - bt \sin(t-2) \\ + at \cos(t-2) + bt \sin(t-2) &\stackrel{?}{=} \cos(t-2) \end{aligned}$$

Vi faktorerer cosinus- og sinus-leddene for seg. Ettersom sinus og cosinus er lineært uavhengige kan vi sette koeffisientene til sinus-leddene på hver side av likhetstegnet lik hverandre OG koeffisientene til cosinus-leddene på hver side av likhetstegnet lik hverandre:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad &(-2a - \cancel{bt} + \cancel{bt}) \sin(t-2) = 0 \sin(t-2) \\ \text{II)} \quad &(-\cancel{at} + 2b + \cancel{at}) \cos(t-2) = 1 \cos(t-2) \end{aligned}$$

Dermed får vi to likninger med to ukjente (a og b) som vi kan løse:

$$\begin{array}{l} \text{I)} -2a = 0 \\ \text{II)} 2b = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

Deretter setter vi inn for $a = 0$ og $b = 1/2$ i uttrykket for $y_p(t)$. Ettersom $a = 0$, forsvinner $\cos(t - 2)$ fra $y_p(t)$, og vi står kun igjen med følgende partikulære løsning:

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t \sin(t-2)$$

Den generelle løsningen på differensiallikningen er som kjent summen av den generelle løsningen til den *homogene* diff.likningen og den *partikulære* løsningen:

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \frac{1}{2}t \sin(t-2)}}$$

Eksamen høst 2023

Oppgave 6

Bestem generell løsning til differensiallikningen

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2t} - 36t.$$

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2t} - 36t \quad (*)$$

$$\text{Gen. løsn. } y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\text{Hom. likn. } y'' + y' - 6y = 0$$

$$\text{Kar. likn. } \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$$y_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_p(t) = ?$$

Strategie: Ubestonke koeff. metode

1. Grunnregel:

Hvis $f(t)$ er	Gjett
$p(t)$	$q(t)$
Ke^{ct}	ae^{ct}
$p(t)e^{ct}$	$q(t)e^{ct}$
$\left. \begin{array}{l} K \cos(\omega t) \\ K \sin(\omega t) \end{array} \right\}$	$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$
$\left. \begin{array}{l} p(t) \cos(\omega t) \\ p(t) \sin(\omega t) \end{array} \right\}$	$q(t) \sin(\omega t) + r(t) \cos(\omega t)$
$\left. \begin{array}{l} Ke^{ct} \cos(\omega t) \\ Ke^{ct} \sin(\omega t) \end{array} \right\}$	$e^{ct}[a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)]$

$$f(t) = 5e^{2t} - 36t$$

Gjett: $y_p(t) = ae^{ct} + \underbrace{q(t)}_{bt+c}$

hvor $f(t)$ er av samme grad som $q(t)$ og $r(t)$ der de opptrer,

2. **Modifikasjon:** Hvis en del av ditt gjett for $y_p(t)$ er en løsning av den homogene likningen; multipliser med t . Hvis løsningen korreponderer til en dobbelrot; multipliser med t^2 .
3. **Summering:** Hvis $f(t)$ er en sum av funksjoner fra tabellen; velg $y_p(t)$ som en sum av de tilhørende gjettene.

Men e^{2t} (fra $f(t)$) opptrer også i y_h ,
 må derfor modifisere gjett:

Übung 2: $y_p(t) = Ate^{ct} + Bt + C$
 $\stackrel{c=2}{=} Ate^{2t} + Bt + C$

$$y_p'(t) = A(2t+1)e^{2t} + B$$

$$y_p''(t) = 4A(t+1)e^{2t}$$

$$4A(t+1)e^{2t} + A(2t+1)e^{2t} + B - 6(Ate^{2t} + Bt + C) = 5e^{2t} - 36t$$

Utfør litt algebraisk manipulasjon.

$$te^{2t}(4A + 2A - 6A) + e^{2t}(4A + A) + t(-6B) + (B - 6C) = 5e^{2t} - 36t + 0$$

Deretter, samle te^{2t} -, e^{2t} -, t -, og konstantledd:

e^{2t} , t , konstantledd lineært.
 $\rightarrow$ 3 likn. m. 3 ujevne

$$\begin{array}{lll} e^{2t}: 5A=5 & t: -6B=-36 & \text{konst. } B-6C=0 \\ \underline{A=1} & \underline{B=6} & 6-6C=0 \\ & & \underline{C=1} \end{array}$$

Sett inn for A, B, C i $y_p(t)$:

$$y_p(t) = te^{2t} + 6t + 1$$

Sett inn for $y_p(t)$ i gen.løsning:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + te^{2t} + 6t + 1 \\ &= \underline{c_1 e^{-3t} + (t + c_2) e^{2t} + 6t + 1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$