

Plenumsregning 14: Oppsummering

Eksamen vår 2023

Oppgave 8

Finn matrisen A som tilfredsstiller likningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the matrix dimensions for the equation $BAC = D$:

- B is a 3×3 matrix.
- A is a 3×2 matrix (unknown).
- C is a 2×2 matrix.
- D is a 3×2 matrix.

The diagram shows the multiplication sequence $BAC = D$ with arrows indicating the flow from B to A to C to D .

Vi løser matriselikningen:

$$\begin{aligned} BAC &= D \\ B^{-1}BAC &= B^{-1}D \\ ACC^{-1} &= B^{-1}DC^{-1} \end{aligned}$$

$$A = B^{-1}DC^{-1}$$

Mellomregning (ikke gjennomgått):

$$[B|I] \sim [I|B^{-1}] \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[C|I] \sim [I|C^{-1}] \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn for B^{-1}, D, C^{-1} i uttrykket for A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Eksamen kont 2023

Oppgave 2

Regn ut $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$ når

$$z = i(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^4 - 3e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$z = i(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^4 - 3e^{\frac{\pi}{2}i}$$

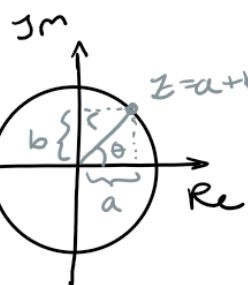
Denne oppgaven handler i stor grad om å dele opp i mindre problemer. Vi ser på de ulike delene av z og oversetter mellom polar og kartesisk form. Vi begynner med å skrive $e^{\frac{\pi}{2}i}$ på kartesisk form:

Generelt

$$z = re^{i\theta}$$

polar

$$z = a + bi \quad \text{kartesisk}$$



$$z = a + bi = re^{i\theta}$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

①

Spesielt

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

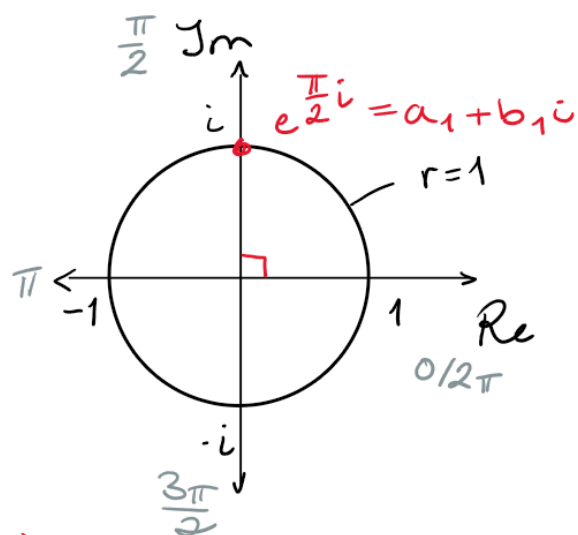
$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$? \quad ?$$

$$a_1 = 1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$a_2 = 1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = 0 + 1i = i$$



Deretter skriver vi $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ på polar form:

$$\textcircled{2} \quad z_2 = \underbrace{\sqrt{2}}_a + i \underbrace{\sqrt{2}}_b \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \begin{cases} r_2 = ? \\ \theta_2 = ? \end{cases}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{mot}}{\text{nos}} = \frac{b}{a}$$

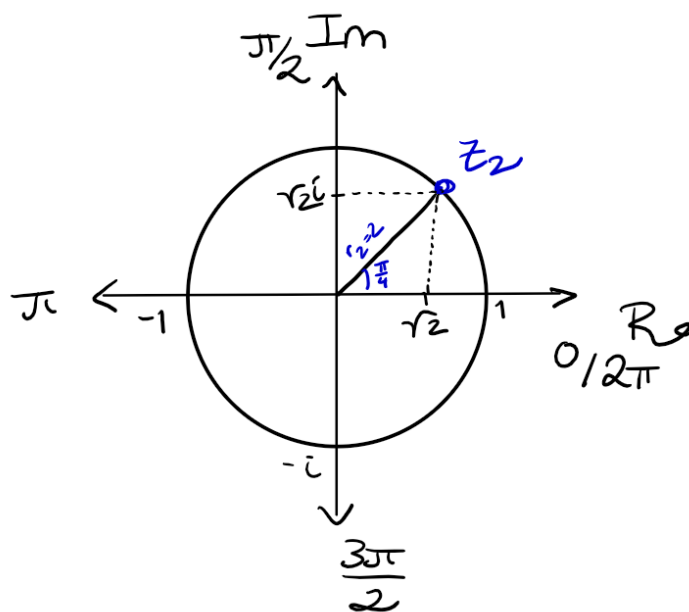
$$r_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \underline{2}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}(1) = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

$$\downarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Vi tegner z_2 for å forsikre oss om at vi har funnet riktig vinkel:



$$\Rightarrow \underline{z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

Nå som vi har $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ på polar form er det lettere å regne ut 4.-potensen:

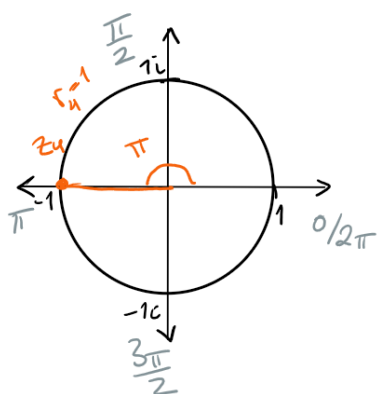
$$\textcircled{3} \quad z_3 = (z_2)^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{\pi}{4} \cdot 4} = 16 e^{i\pi} = 16(-1) = \underline{-16}$$

$$\textcircled{4} \quad z_4 = e^{i\pi} \quad \begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases}$$

Ser av figuren at

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

$$z_4 = -1 + 0i = \textcircled{-1}$$



Over har vi oversatt $e^{\pi i}$ til kartesisk form. Nå setter vi inn i det opprinnelige uttrykket for z :

$$\textcircled{5} \quad z = \underbrace{i}_{-16} - 3i$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_5 \quad i^{-16} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{-16} = e^{i\frac{\pi}{2}(-16)} = e^{-8\pi i} = e^{0i} = \underline{1}$$

Da har vi z på kartesisk form og kan bestemme $\operatorname{Re}(z)$ og $\operatorname{Im}(z)$:

$$\textcircled{6} \quad z = \underbrace{1}_{\operatorname{Re}(z)} - \underbrace{3i}_{\operatorname{Im}(z)}$$

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Finn en basis for $\operatorname{Col} A$ og $\operatorname{Null} A$.
- Har systemet

$$Ax = b$$

Løsning for enhver $b \in \mathbb{R}^3$? Hvis det har en løsning for en spesifikk b , er denne løsningen da unik? Begrunn svaret.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Først finner vi en basis for nullrommet til A . Dette er alle vektorer som er løsninger av det homogene likningssystemet, $Ax = \mathbf{0}$:

$$\textcircled{1} \quad N(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{A\vec{x}} = \vec{0} \}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_3 &= s, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 \\ x_2 &= 2x_3 \\ x_3 &= s \end{aligned} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s, \forall s \in \mathbb{R} \quad N(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Deretter skal vi finne en basis for kolonnerommet til A , $\text{Col}(A)$. Vi husker definisjonen av kolonnerom:

Definisjon

Kolonnerommet til en reell $m \times n$ -matrise

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$$

er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A :

$$\text{C}(A) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

Kolonnerommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A . Produktet $A\mathbf{v}$ er nettopp alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A , så vi kan skrive følgende:

$$\text{Col}(A) = \{A\vec{y} \mid \vec{y} \in \mathbb{R}^n\}$$

Vi finner en basis for kolonnerommet ved å:

- 1) Radredusere A .
- 2) Identifisere kolonnene med ledende enere.
- 3) Velge deres respektive kolonner i den opprinnelige matrisen A .

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Deretter ønsker vi å finne ut om likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\textcircled{3} \quad A\vec{x} = \vec{b} \text{ løsbart } \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3?$$

Men siden kolonnerommet til A IKKE er maksimalt, altså $\dim(\text{Col}(A)) = 2 < 3$, så vil det finnes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ slik at systemet ikke er løsbart:

$$\text{Ettersom } \dim(\text{Col}(A)) = 2 < 3 \Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a. } A\vec{x} = \vec{b} \text{ IKKE er løsbart}$$

Med andre ord finnes det vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ som IKKE kan uttrykkes som lineærkombinasjoner av kolonnene til A .

Så, gitt at systemet har en løsning for en gitt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, er denne løsningen unik?

$$\textcircled{4} \quad \text{Gitt at } A\vec{x} = \vec{b} \text{ løsbart for gitt } \vec{b}, \text{ er } \vec{x} \text{ UNIK?$$

At systemet er løsbart betyr at det finnes en $\mathbf{x}$ s.a. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ løsbart for gitt } \vec{b} \Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a. } A\vec{x} = \vec{b} \\ \vec{b} \in \text{Col}(A)$$

En generell løsning $\mathbf{x}$ vil være på følgende form:

$$\text{Gen. løsn. } \vec{x} \text{ av } A\vec{x} = \vec{b} \text{ er på formen}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_p$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 Gen. løsn. Partikuler
 av $A\vec{x} = \vec{0}$ løsn. av $A\vec{x} = \vec{b}$

Men vi har jo sett at det finnes uendelig mange løsninger av det homogene likningssystemet. Altså finnes det uendelig mange generelle løsninger $\vec{x}$, og dermed vil ikke løsningen være unik:

$$\exists \infty \text{ mange } \vec{x}_0 \Rightarrow \exists \vec{x} \text{ løsn. av } A\vec{x} = \vec{b} \\ \hookrightarrow \text{M.a.o., } \vec{x} \text{ IKKE unik.}$$

Eksamen vår 2023

Oppgave 5

- Finn egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Når det er kjent at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer.

- ~~Løs deretter initialverdi problemet~~

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.$$

Vi gjør kun første del av oppgaven her for å repetere kunnskaper fra lengre tilbake i tid.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{egenvektorer}$$

Vi ønsker å finne egenverdiene til A :

$$\lambda_i = ?$$

Vi regner ut produktet $A\vec{u}$ og ser at $\vec{u}$ er uforandret. Dermed har $\vec{u}$ egenverdi $\lambda_1 = 1$:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

Deretter regner vi ut produktet $A\vec{v}$:

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Vi finner (den antatte) skaleringsfaktoren ved å løse likningen $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$ komponentvis:

$$A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{I)} \quad 3 = 2\lambda_2 \\ \text{II)} \quad \frac{3}{2} = \lambda_2 \end{array} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = \frac{3}{2}}$$

Eksamen kont 2023

Oppgave 8

Benytt minste kvadraters metode til å finne andregradspolynomet

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

som minimerer avstanden til datapunktene

x	-1	0	1	2
y	1	-2	0	5

(Det vil si, finn a , b og c).

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

x	-1	0	1	2
$p(x)$	1	-2	0	5

Datapunktene gir oss 4 likninger med 3 ukjente, altså et overbestemt likningssystem:

$$p(-1) = 1 \Leftrightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 1 \Leftrightarrow a - b + c = 1$$

$$p(0) = -2 \quad \text{---} n \text{---} \Leftrightarrow c = -2$$

$$p(1) = 0 \quad \text{---} n \text{---} \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$p(2) = 5 \quad \text{---} n \text{---} \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 5$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ?$$

Dette systemet er i utgangspunktet ikke løsbart, men ved hjelp av minste kvadraters metode kan vi finne en tilnærmet løsning ved å løse et annet likningssystem:

$$A\vec{x} = \vec{b} \xrightarrow{\text{MKM}} A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

(Mellomregningen for å finne matrisene A^T , $A^T A$ og $A^T \mathbf{b}$ er utelatt her)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 21 \\ 8 & 6 & 2 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 \end{array} \right] \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

$$\Rightarrow p(x) = 2x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{17}{10} \text{ er minste kvadrates løsning}$$

Eksamen vår 2023

Oppgave 9

La

$$P_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = ax^2 + bx + c \text{ for koeffisienter } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

være vektorrommet av reelle polynomer av grad høyst 2.

- Vis at $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definert ved

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} \quad (p'(x) = \frac{dp}{dx}(x), \quad p''(x) = \frac{d^2p}{dx^2}(x))$$

er en lineærtransformasjon og

- bestem $\ker T$.

$$T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix}$$

① Viser T lin. trans:

Vi viser at T er en lineærtransformasjon ved å kontrollere at T er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon:

$$\text{La } p, q \in P_2(\mathbb{R})$$

Først, er T lukket under addisjon?

$$i) \mathcal{T}(p+q) \stackrel{?}{=} \mathcal{T}(p) + \mathcal{T}(q)$$

I de kommende utregningene bruker vi at derivasjon er en lineær operasjon:

$$\circledast \begin{cases} (p+q)'(x) = p'(x) + q'(x) \\ (p+q)''(x) = p''(x) + q''(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{T}(p+q) = \begin{bmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)'(1) \\ (p+q)''(2) \end{bmatrix} \stackrel{\circledast}{=} \begin{bmatrix} p(0)+q(0) \\ p'(1)+q'(1) \\ p''(2)+q''(2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}(p)} + \underbrace{\begin{bmatrix} q(0) \\ q'(1) \\ q''(2) \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}(q)}$$

Så T er lukket under addisjon, men er T lukket under skalarmultiplikasjon?

$$ii) \text{ La } p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{T}(cp) \stackrel{?}{=} c\mathcal{T}(p)$$

$$\begin{cases} (cp)'(x) = cp'(x) \\ (cp)''(x) = cp''(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{T}(cp) = \begin{bmatrix} (cp)(0) \\ (cp)'(1) \\ (cp)''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp'(1) \\ cp''(2) \end{bmatrix} = c \underbrace{\begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix}}_{c\mathcal{T}(p)}$$

Ettersom både i) og ii) er oppfylt vet vi at T er en lineærtransformasjon:

$$i) + ii) \\ \implies \mathcal{T} \text{ lin. trans.}$$

Deretter finner vi kjernen til transformasjonen. Vi husker definisjonen av kjernen, nemlig at den består av alle de elementene som sendes til **0**-elementet:

$$\textcircled{2} \text{ } \ker(T) = ?$$

$$\ker(T) = \{ p(x) = ax^2 + bx + c \mid T(p) = \vec{0} \}$$

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix}$$

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 2a \cdot 1 + b \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2a + b \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 & 2 \cdot 0 + b = 0 \rightarrow b = 0 \\ 2a = 0 & \uparrow \\ & \rightarrow a = 0 \end{cases}$$

$$T(p) = \vec{0} \Leftrightarrow p(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\ker(T) = \{0\}}}$$

Kjernen til T består altså kun av nullelementet, det trivielle polynomet.

Eksamen kont 2023

Oppgave 9 (Ikke gjennomgått)

La $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ betegne vektorrommet av reelle $n \times n$ -matriser og la

$$S_n = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^T = A\} \quad (A^T \text{ er den transponerte av } A)$$

- Bestem en basis for S_n når $n = 2$.
- Finn $\dim S_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$M_{n \times n}(\mathbb{R})$ vektorrom

$$S_n = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

Vi ønsker nå å finne en basis for S_n når $n = 2$.

① $n=2$, basis for S_2

Vi lar A være en vilkårlig 2×2 -matrise med reelle koeffisienter:

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

A er med i mengden S_2 hvis og bare hvis A er sin egen transponert. Med symboler:

$$\begin{aligned} A \in S_2 &\Leftrightarrow A = A^T \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow b = c \end{aligned}$$

Dermed vet vi at en generell matrise i S_2 er på følgende form:

$$\text{En generell matrise i } S_2 \text{ er på formen } \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

Vi kan dekomponere denne matrisen og skrive den som en lineærkombinasjon av følgende matriser:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3}$$

Disse matrisene er lineært uavhengige. Siden matrisen A var en generell matrise, betyr det at vi kan skrive alle matriser i S_2 som en lineærkombinasjon av disse matrisene. De danner med andre ord en basis for S_2 :

$$\Rightarrow S_2 = \text{Span} \{ \underbrace{M_1}_{\downarrow}, \underbrace{M_2}_{\downarrow}, \underbrace{M_3}_{\downarrow} \}$$

Basis for S_2

Deretter ønsker vi å bestemme dimensjonen til S_n for alle naturlige tall n :

$$\textcircled{2} \dim S_n = ? \quad \forall n$$

Vi ser først på tilfellet $n = 1$. $S_n = \mathbb{R}$, og dimensjonen er dermed 1:

$$i) n = 1$$

$$S_1 = \mathbb{R}, \quad \dim(S_1) = 1$$

Tilfellet $n = 2$ har vi allerede redegjort for:

$$ii) n = 2, \quad \dim(S_2) = 3$$

I det offisielle løsningsforslaget redegjør man for $n \geq 2$ direkte. Vi kan evt. gå veien om $n = 3$ for å få oversikt over mønsteret først:

$$iii) n = 3 \quad (\text{flinkilign})$$

$$A_{3 \times 3} = A_{3 \times 3}^T$$

$$\begin{bmatrix} a & \textcircled{b} & \textcircled{c} \\ \textcircled{d} & e & \textcircled{f} \\ \textcircled{g} & \textcircled{h} & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \textcircled{d} & \textcircled{g} \\ \textcircled{b} & e & \textcircled{h} \\ \textcircled{c} & \textcircled{f} & i \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} b = d \\ c = g \\ f = h \end{array} \right.$$

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_1 M_2 M_3
 M_4 M_5 M_6

$$S_3 = \text{Sp} \{ M_1, \dots, M_6 \}$$

$$\dim(S_3) = 6$$

Herfra ser vi på 2 alternative løsninger for å avgjøre $\dim S_n$:

Alternativ 1:

iv) For $n \geq 2$, $\dim S_n = ?$

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \quad \text{alle } a_{ij} \text{ reelle}$$

$$A^T = A \iff a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

MERK:

- Det er n diagonale elementer (en for hver a_{ii})

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{— } n \text{ slike elementer}$$

- For hvert par (i, j) av ikke-diagonale elementer, hvor $i < j$, kan a_{ij} velges fritt, og a_{ji} må være lik (for at $A^T = A$). Hvor mange slike par har vi?

En $n \times n$ matrise har n^2 elementer ($i=j$)

Vi har n diagonalelementer

Da har vi $n^2 - n = n(n-1)$ ikke-diagonalelementer

I en symmetrisk matrise er $a_{ij} = a_{ji}$

Men at $a_{ij} = a_{ji}$, betyr også at $a_{ji} = a_{ij}$
(Ex: $b = d, d = b$)

Men rekkefølgen er likegyldig!

Vi må telle antall uordnede par $\{i, j\}$

↳ M.a.o. hvor mange måter kan vi velge 2 forskjellige indekser i, j m. $i < j$, uten å bry oss om rekkefølgen?

Fra kombinatorikk:

$$\underline{\binom{n}{2}} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ slike par}$$

Vi har altså $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ slike elementer, og basismatriser

$$\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alternativ 2 (som i det offisielle løsningsforslaget)

For $n \geq 2$ vil S_n bestå av alle symmetriske $n \times n$ -matriser hvor koeffisientene tilfredsstillende følgende:

iv) For $n \geq 2$

$$S_n = \left\{ A_{n \times n}(\mathbb{R}) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mid a_{ij} = a_{ji} \text{ for } 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

Vi tenker oss nå en generell matrise A i S_n , som vi ønsker å uttrykke som en lineærkombinasjon av enkle matriser, $E_{k,l}$. Vi lar $E_{k,l}$ for k, l mellom 1 og n være $n \times n$ -matrisen med koeffisient lik 1 i posisjonene (k, l) og (l, k) og koeffisienter lik 0 ellers.

$$E_{k,l} \quad \forall \quad 1 \leq k, l \leq n \quad n \times n\text{-matrise m. koeff. } 1 \text{ i } (k,l) \text{ og } (l,k), \text{ og } 0 \text{ ellers}$$

Dermed kan vi, som i 2×2 - (og 3×3 -)tilfellet, dekomponere A , altså uttrykke den som en lineærkombinasjon av de enkle matrisene:

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

Disse matrisene $E_{i,j}$ vil utgjøre en basis for S_n .

$$\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \text{ basis for } S_n$$

Dimensjonen til S_n er, per definisjon, lik antall basismatriser, altså:

$$\dim S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n (n-i+1) = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$