

Plenumsregning 1: Komplekse tall

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Beregn og merk av i det komplekse planet. Husk at det kan være lurt å bruke polarform.

b) $(1 + i) \cdot (1 + \sqrt{3}i)$

e) $\frac{1+2i}{1-2i}$

Teorem 1.2. *La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Vi har*

$$z + w = a + c + (b + d)i$$

$$z - w = a - c + (b - d)i$$

$$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

c) $\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$

Teorem 1.7. *La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$. Da gjelder:*

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)}$$

Oppgave 3

La $z = a + bi$. Finn real- og imaginærdelen til

d) $\frac{1}{z^2}$

TRIKS: Gange med den konjugerte oppe og nede.

Husk: $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Husk: 3. kvadratsetning

$$(x + y)(x - y) = (x^2 - y^2)$$

Oppgave 9

La $z \neq 0$ og $w \neq 0$ være komplekse tall. Vis at $zw \neq 0$.

Innlevering 1 H2023 TMA4110

Oppgave 6

Finn real- og imaginærdelen til $z = i^3 + i^i$.

Oppgave 8

Finn alle tredjerøttene til 1.

Tegn en rett linje fra løsning til løsning etter økende vinkel. Hvilken geometrisk figur er dette?

Algebraens fundamentalteorem

La $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, c_i \in \mathbb{C}$.

Da finnes komplekse tall $r_1, r_2, \dots, r_n$ slik at

$$p(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

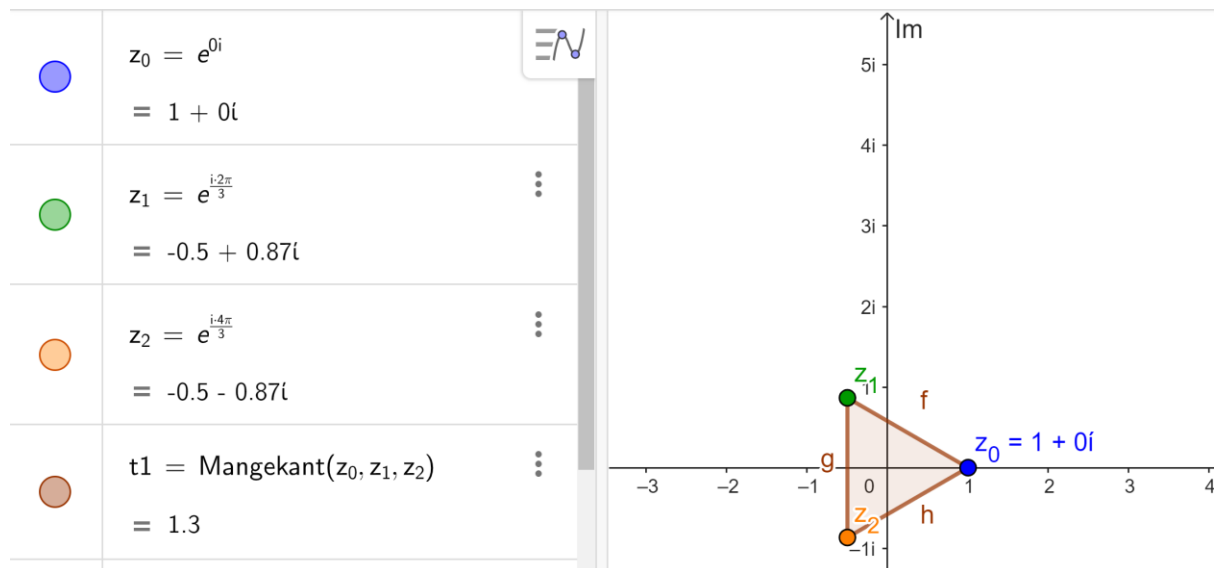
Dvs. et n -te gradspolynom har alltid n komplekse røtter.

OPPSKRIFT

- 1) Skriv z på polarform
- 2) Røttene er på formen

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}$$

- 3) Det er n ulike komplekse røtter. For $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ regner vi ut vha. formelen over.



Merk:

- z_1 og z_2 er hverandres komplekskonjugerte. Generelt er det slik at hvis alle koeffisientene c_i er relle og $r = a + ib$ er en rot, så er også og $\bar{r} = a - ib$ en rot.
- z_0, z_1, z_2 er ekvidistante. Generelt er det slik at de n n-te røttene til et komplekst tall z vil være punkter med lik avstand rundt sirkelen med radius lik $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Eksamen H2023 TMA4110

Oppgave 3

Bestem alle komplekse løsningene til ligningen

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0.$$

Skriv løsningene på polarform. *Hint: Klarer du å se én løsning direkte?*

