Plenumsregning 4: Lineær uavhengighet og determinanter

# Kapittel 5: Lineær uavhengighet

## Oppgave 1

1. Sjekk at vektorene

$$\left[\begin{matrix}1\\5\\-3\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}4\\18\\4\end{matrix}\right]$$

er lineært uavhengige.

Definisjon

$v\_{1}, v\_{2}, …, v\_{n}$er **lineært uavhengige** dersom $c\_{1}v\_{1}+c\_{2}v\_{2}+ …c\_{n}v\_{n}=0$

$$⇔$$

$c\_{1}=c\_{2}=...=c\_{n}=0$

To vektorer, $u$ og $v$, $u, v\ne 0$, er lineært uavhengige $⇔$ $u\ne cv$, $c\ne 0$ skalar.

Teorem 5.6

1. Finn en tredje vektor $w$som sammen med vektorene i a) er lineært uavhengige.

Teorem 5.13

Gitt $n$ vektorer $v\_{1}, v\_{2}, …, v\_{n}$. Hvis en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre så er vektorene lineært avhengige.

**Strategi**

1. Lage en vektor $x=(x\_{1}, x\_{2}, x\_{3})$ som ER en lin.komb. (og dermed lin.avh.) av $u$ og $v$**.**
2. Endre én komponent i $x$ for å lage en ny vektor $w$som er lin.uavh. av $u$ og $v$.

1. Vis at $w$ og vektorene i a) til sammen spenner ut $R^{3}.$

Definisjon

**Spennet** av en mengde vektorer $v\_{1}, v\_{2}, …, v\_{n}$er mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorene:

$span\{v\_{1}, v\_{2}, ..., v\_{n}\}=\{c\_{1}v\_{1}+c\_{2}v\_{2}+ …c\_{n}v\_{n}|c\_{1}, c\_{2}, ..., c\_{n} $skalarer$\}$

$c\_{1}=c\_{2}=...=c\_{n}=0$

Teorem 5.14

$v\_{1}, v\_{2}, ..., v\_{n}$er lineært uavhengige $⇔ span\{v\_{1}, v\_{2}, ..., v\_{n}\}=R^{n}$

## Oppgave 4

De to bildene viser vektorer i $R^{2}$.

1. 
2. 

I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $R^{2}$? Begrunn svarene dine.

## Oppgave 5

Er vektorene lineært uavhengige?

b) $\left[\begin{matrix}2\\4\\2i\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}i\\2i\\-1\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}5-3i\\10+2i\\4+6i\end{matrix}\right]$

Teorem 5.8

Kolonnene i $A$ er lineært uavhengige $⇔ Ax=0$kun har triviell løsning ($x=0$).

# Kapittel 6: Determinanter

## Oppgave 1

Regn ut determinanten til matrisen

$$\left[\begin{matrix}1&1&0\\1&2&2\\3&-1&-2\end{matrix}\right]$$

Og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige.

Teorem 6.12

$A n×n$-matrise:

$det(A)\ne 0 ⇔ $kolonnene til $A$ er lineært uavhengige.

## Oppgave 6

Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $R^{2}$, og regn ut arealet.

1. $\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right] $

1. $\left[\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right]$

## Oppgave 7

La $A$ være matrisen

$$\left[\begin{matrix}a&b&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\c&0&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\y\end{matrix}&\begin{matrix}x\\z\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

1. Finn $det(A)$uttrykt ved *a, b, c* og *x, y, z*.
2. For hvilke *a, b, c* og *x, y, z* er *A* inverterbar?

Teorem 6.12

$A n×n$-matrise:

$A$ inverterbar $⇔ det(A)\ne 0.$

# Eksamen kont 2023

## Oppgave 5

Anta at $u, v$og $w$ er lineært uavhengige vektorer. Vis at de tre vektorene

$u+v$, $u+w$og $v+w$

også er lineært uavhengige.



# Eksamen høst 2018

## Oppgave 2

Se på følgende vektorer i $R^{3}$:

$$v\_{1}=\left[\begin{matrix}3\\-3\\-6\end{matrix}\right], v\_{2}=\left[\begin{matrix}-2\\2\\4\end{matrix}\right], v\_{3}=\left[\begin{matrix}1\\-1\\8\end{matrix}\right], b=\left[\begin{matrix}4\\-9\\3\end{matrix}\right]$$

Er vektorene $v\_{1}$, $v\_{2} og v\_{3}$ lineært uavhengige? Er $b$en lineærkombinasjon av $v\_{1}$, $v\_{2} og v\_{3}$?

Teorem 6.12 (forkortet)

$A n×n$-matrise:

Kolonnene i $A$ er lineært uavhengige $⇔ det(A)\ne 0.$

**Oppsummering**

For $A n×n$-matrise er følgende påstander ekvivalente:

1. Kolonnene i $A$ er lineært uavhengige.
2. Kolonnene til $A$ spenner ut $R^{n}$.
3. $det(A)\ne 0.$
4. $A$ inverterbar.

