

Plenumsregning 4: Lineær uavhengighet og determinanter

Kapittel 5: Lineær uavhengighet

Oppgave 1

a) Sjekk at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Definisjon

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er **lineært uavhengige** dersom $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Teorem 5.6

To vektorer, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, er lineært uavhengige $\Leftrightarrow \mathbf{u} \neq c\mathbf{v}$, $c \neq 0$ skalar.

- b) Finn en tredje vektor $\mathbf{w}$ som sammen med vektorene i a) er lineært uavhengige.

Teorem 5.13

Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Hvis en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre så er vektorene lineært avhengige.

Strategi

- 1) Lage en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ som ER en lin.komb. (og dermed lin.avh.) av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
- 2) Endre én komponent i $\mathbf{x}$ for å lage en ny vektor $\mathbf{w}$ som er lin.uavh. av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

c) Vis at $\mathbf{w}$ og vektorene i a) til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Definisjon

Spennet av en mengde vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorene:

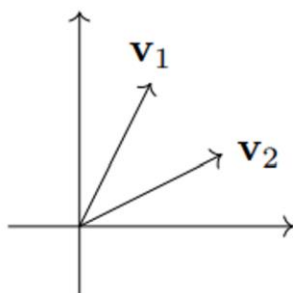
$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \text{ skalarer}\}$$

Teorem 5.14

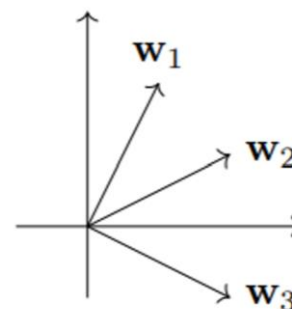
$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \text{ er lineært uavhengige} \Leftrightarrow \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n$$

Oppgave 4

De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.



a)



b)

I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

Oppgave 5

Er vektorene lineært uavhengige?

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 2i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 - 3i \\ 10 + 2i \\ 4 + 6i \end{bmatrix}$

Teorem 5.8

Kolonnene i A er lineært uavhengige $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har triviell løsning ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Kapittel 6: Determinanter

Oppgave 1

Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige.

Teorem 6.12

A $n \times n$ -matrise:

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ kolonnene til A er lineært uavhengige.

Oppgave 6

Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Oppgave 7

La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}$$

a) Finn $\det(A)$ uttrykt ved a, b, c og x, y, z .

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?

Teorem 6.12

A $n \times n$ -matrise:
 A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Eksamen kont 2023

Oppgave 5

Anta at $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige vektorer. Vis at de tre vektorene

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \text{ og } \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

også er lineært uavhengige.

Eksamen høst 2018

Oppgave 2

Se på følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$?

Teorem 6.12 (forkortet)

A $n \times n$ -matrise:

Kolonnene i A er lineært uavhengige $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Oppsummering

For A $n \times n$ -matrise er følgende påstander ekvivalente:

- a) Kolonnene i A er lineært uavhengige.
- b) Kolonnene til A spanner ut $\mathbb{R}^n$.
- c) $\det(A) \neq 0$.