

Plenumsregning 5: Vektorrom

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Svar med begrunnelse på følgende spørsmål:

- b) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$ av likningen
- $$x - y + z = 0$$
- et underrom av $\mathbb{C}^3$?

Definisjon

V mengde. To operasjoner:

- I. Addisjon av vektorer: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
- II. Skalarmultiplikasjon: $c\mathbf{u}$

For at V skal være et **vektorrom**, må V være:

- Lukket under addisjon
- Lukket under skalarmultiplikasjon

I tillegg må vektoraksiomene (V1-V8) være oppfylt.

Definisjon

Et **underrom** av et vektorrom V er en *delmengde* $U \subseteq V$ som i seg selv utgjør et vektorrom, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i V .

Teorem 7.9

For $U \subseteq V$, U er et *underrom* av V dersom

- 1) Nullvektoren i V ligger i U
- 2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in U \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ (lukket under addisjon)
- 3) $c\mathbf{u} \in U \quad \forall \mathbf{u} \in U, \quad c \text{ skalar}$ (lukket under skalarmultiplikasjon)

c) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$ av likningen
$$x - y + z = 0$$
et underrom av $\mathbb{C}^3$?

Oppgave 2

La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V . Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V .

Merk:

- For å vise at en påstand stemmer, må vi vise at den holder for alle mulige tilfeller.
- For å vise at en påstand IKKE stemmer, er det nok å finne ett moteksempel.

Oppgave 7

La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektoraksiomene.

aksiomer for addisjon	{	(V1)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. (Vektoraddisjon er en <i>assosiativ</i> operasjon.)
		(V2)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. (Vektoraddisjon er en <i>kommutativ</i> operasjon.)
		(V3)	Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$. (Vektoraddisjon har et <i>identitetselement</i> .)
		(V4)	For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes en vektor $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. (Vektoraddisjon har <i>inverser</i> for alle elementer.)
aksiomer for skalar- multi- plikasjon	{	(V5)	$(ab) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og alle skalarer a og b . (Skalarmultiplikasjon er <i>kompatibel</i> med multiplikasjon av skalarer.)
		(V6)	$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$. (Tallet 1 er <i>identitetselement</i> for skalarmultiplikasjon.)
		(V7)	$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og alle skalarer a . (Skalarmultiplikasjon er <i>distributiv</i> over addisjon av vektorer.)
		(V8)	$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, og alle skalarer a og b . (Skalarmultiplikasjon er <i>distributiv</i> over addisjon av skalarer.)

- b) Hvis $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ for tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$ i V , så følger det at $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Oppgave 10

- a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

Definisjon

En **basis** for et vektorrom V er en mengde

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n\}$$

vektorer i V som oppfyller følgende betingelser:

- 1) Vektorene spanner ut V , dvs. $\text{Sp}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n\} = V$.
- 2) Vektorene er lineært uavhengige, dvs. $c_1\boldsymbol{\beta}_1 + c_2\boldsymbol{\beta}_2 + \dots + c_n\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ for c_i skalarer.

- b) Hva er koordinatene til polynomet $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

Eksamen Kont 2019

Oppgave 2

La A være en reell $m \times n$ -matrise.

- a) Skriv ned definisjonen på nullrommet til A . Vis at nullrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Definisjon

Nullrommet til en reell $m \times n$ -matrise A er løsningsmengden til likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, altså delmengden:

$$\text{Null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

av $\mathbb{R}^n$.

b) Ligger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I nullrommet til A ? Finn en basis for $\text{Col } A$ og en basis for $\text{Null } A$. Bestem dimensjonen på disse underrommene.

Gjøreliste:

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Null } A$
2. Basis for $\text{Col } A$
3. Basis for $\text{Null } A$
4. $\dim \text{Col } A$
5. $\dim \text{Null } A$

Definisjon

Kolonnerommet til en reell $m \times n$ -matrise

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$$

er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A :

$$\text{Col } A = \text{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

Fremgangsmåte:

- i. Gauss-eliminer A .
- ii. Finn pivotelementer.
- iii. Kolonnene i A som har ledende enere i den reduserte formen danner en basis for $\text{Col } A$.

Definisjon

V endeligdimensjonalt vektorrom. Vi definerer **dimensjonen** til V , $\dim V$, som antall vektorer i en basis for V . Hvis β er en basis for V har vi altså

$$\dim V = |\beta|.$$

Teorem 7.27

La A være en $m \times n$ -matrise. Da er

$$\dim \text{Null } A + \text{rank } A = n$$

Oppgave 12

La A være en $m \times n$ -matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim(\text{Col}(A)) > 0$

b) $\dim(\text{Null}(A)) > 0$

