Plenumsregning 6: Lineærtransformasjoner

# Innlevering 2

## Oppgave 4

La

$$B=\left[\begin{matrix}1+2i&0&3i\\2&0&1+i\\0&2i&1-i\end{matrix}\right]$$

1. Finn $B^{-1}$ ved gausseliminasjon.





 **Oppsummering**

* Bytt om på rader for å tilrettelegge for trappeform
* Gjør komplekse elementer til reelle der vi vil eliminere tall
	+ Dette gjør det lettere å se hva vi må gange med når vi skal eliminere.
* Unngå brøker. Gjør heller tall større.
* *Slow is fast*: Mange små steg.

# Ekstraoppgaver

## Oppgave 2

1. Finn ut om funksjonen $T$ er en lineærtransformajson mellom reelle vektorrom.

Hvis den er det:

1. Finn standardmatrisen til $T$
2. Regn ut $ker(T)$
3. Regn ut $im(T)$
4. Finn ut om $T$ er injektiv
5. Finn ut om $T$ er surjektiv
6. $T\left(\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right]\right)=\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{tan(x)}{e^{y}}\right]$

Definisjon

$V, W$ vektorrom

$T:V\rightarrow W$er en **lineærtransformasjon** hvis

1. $T\left(u+v\right)=T(u)+T(v)$ $ ∀ u, v\in V$
2. $T\left(cu\right)=cT\left(u\right)$ $ ∀ u\in V, ∀c$ skalar



1. $T\left(\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right]\right)=2x+y$

Definisjon

**Standardmatrisen** $A$ til en lineærtransformasjon $T$ er

$$A=\left[\begin{matrix}T(e\_{1})&T(e\_{2})&\begin{matrix}…&T(e\_{n})\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

Definisjon

$$T:V\rightarrow W$$

**Kjernen** til $T$ ($ker(T))$ er mengden av vektorer $v$ som sendes til $0$ av $T$:

$$ker(T)=\left\{T(v)=0\right\}$$

Definisjon

For en funksjon$ f: A\rightarrow B$, har vi at $f$ er ***injektiv*** (eller ***en-til-en***) hvis det $∀b\in B$ er maksimalt én $a\in A$ s.a. $f(a)=b$.



Definisjon

For en funksjon$ f: A\rightarrow B$, har vi at $f$ er**surjekti***v* (eller **på**) hvis det $∀b\in B$ finnes en $a\in A$ s.a. $f(a)=b$.



Definisjon

Anta at vi har en funksjon $f: A\rightarrow B$.

***Bildet*** til $f$ ($im(f)$) er mengden av alle elementer i kodomenet som treffes av funksjonen:

$$im(f)=\left\{a\in A\right\}$$



Så bildet kan treffe deler av $B$ eller hele $B$, avhengig av om funksjonen er ***surjektiv*** eller ei.

Definisjon

For en funksjon$ f: A\rightarrow B$, har vi at $f$ er ***bijektiv*** dersom $f$ er både *injektiv* og *surjektiv*.

Oppgave 4
La

$$β=\left(b\_{1}=\left[\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right],b\_{2}=\left[\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right]\right)$$

og

$$C=\left(c\_{1}=\left[\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right],c\_{2}=\left[\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right]\right)$$

være basiser for $R^{2}$.

* Finn vektoren $y=\left[\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right]$ uttrykt i $β$-basisen.
* Finn matrisene $A$ og $B$ slik at $\left[x\right]\_{c}=A\left[x\right]\_{β}$ og $\left[x\right]\_{β}=B\left[x\right]\_{c}$ for alle $x$ i $R^{2}$.

Teorem 8.16

$V$ $n$-dimensjonalt vektorrom

$$β=(\vec{β}\_{1}, \vec{β}\_{2},…,\vec{β}\_{n}) $$

$$γ=(\vec{γ}\_{1},\vec{γ}\_{2},…,\vec{γ}\_{n})$$

Da finnes $A\_{n×n}$ s.a.

$$\left[\vec{x}\right]\_{γ}=A\left[\vec{x}\right]\_{β}, ∀\vec{x}\in V$$

hvor kolonnene i $A$ er $γ$-koordinatvektorene i $β$:

$$A=\left(\begin{matrix}\left[\vec{β}\_{1}\right]\_{γ}&\left[\vec{β}\_{2}\right]\_{γ}&\begin{matrix}…&\left[\vec{β}\_{n}\right]\_{γ}\end{matrix}\end{matrix}\right)$$







# Eksamen kont 2019

## Oppgave 3

En lineærtransformasjon $T: R^{2}\rightarrow R^{2}$ avbilder firkanten med hjørner i

$(0,0), (1,0), (0,1)$ og (1,1)

til parallellogrammet utspent av

$\left[\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right]$ og $\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right]$



Finn standardmatrisen $A $til $T$ og regn ut $T\left(\left[\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right]\right)$. Finn k$er(T)$. Er $T$ surjektiv?

**Mål**:

1. Finne matrisen $A$ for $T$.
2. Finne $T(\left[\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right])$
3. Finne $ker(T)$
4. $T$ surjektiv?

«Yndlingsteorem» (utdrag)

$A n×n$-matrise.

Lineærtransformasjonen $T\_{A}:$ $R^{n}\rightarrow R^{n}$ gitt ved $T\_{A}\left(x\right)=Ax$ er ***surjektiv***

$$⇔$$

$det\left(A\right)\ne 0$.

Se <https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4115/2025v/15-inverterbarhet.pdf> for fullstendig versjon.

## Oppgave 5

1. Finn en basis $γ$ for $P\_{2}$ slik at

$$\left[p\right]\_{γ}=\left[\begin{matrix}p(0)\\p(1)\\p(2)\end{matrix}\right]$$

Er koordinatene til et andregradspolynom $p$.

1. La $p$ være gitt ved $p(x)=x^{2}$. Finn koordinatene til $p$ med hensyn på $γ.$