

Plenumsregning 6:

Lineærtransformasjoner

Innlevering 2

Oppgave 4

La

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 0 & 3i \\ 2 & 0 & 1 + i \\ 0 & 2i & 1 - i \end{bmatrix}$$

- a) Finn B^{-1} ved gausseliminasjon.

Oppsummering

- Bytt om på rader for å tilrettelegge for trappeform
- Gjør komplekse elementer til reelle der vi vil eliminere tall
 - Dette gjør det lettere å se hva vi må gange med når vi skal eliminere.
- Unngå brøker. Gjør heller tall større.
- *Slow is fast*: Mange små steg.

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon mellom reelle vektorrom.

Hvis den er det:

2. Finn standardmatrisen til T
3. Regn ut $\ker(T)$
4. Regn ut $\operatorname{im}(T)$
5. Finn ut om T er **injektiv**
6. Finn ut om T er **surjektiv**

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix}$

Definisjon

V, W vektorrom

$T: V \rightarrow W$ er en **lineærtransformasjon** hvis

- I. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- II. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u} \in V, \forall c$ skalar

$$\text{b) } T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y$$

Definisjon

Standardmatrisen A til en lineærtransformasjon T er

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \dots \quad T(\mathbf{e}_n)]$$

Definisjon

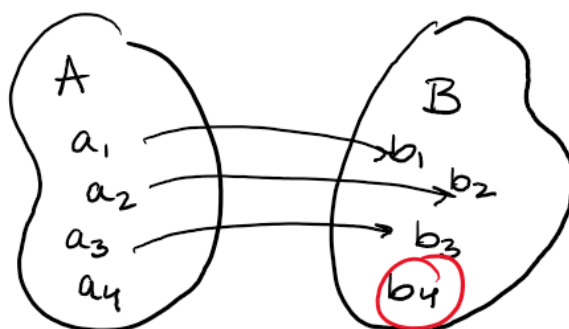
$$T: V \rightarrow W$$

Kjernen til T ($\ker(T)$) er mengden av vektorer $\boldsymbol{v}$ som sendes til $\mathbf{0}$ av T :

$$\ker(T) = \{ \boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \}$$

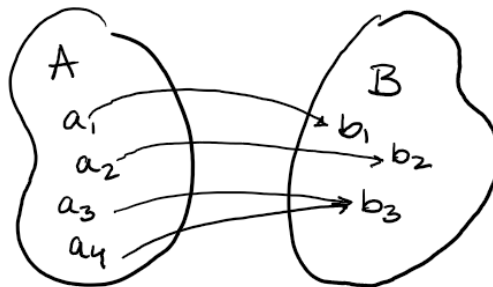
Definisjon

For en funksjon $f: A \rightarrow B$, har vi at f er **injektiv** (eller **en-til-en**) hvis det $\forall b \in B$ er maksimalt én $a \in A$ s.a. $f(a) = b$.



Definisjon

For en funksjon $f: A \rightarrow B$, har vi at f er **surjektiv** (eller **på**) hvis det $\forall b \in B$ finnes en $a \in A$ s.a. $f(a) = b$.

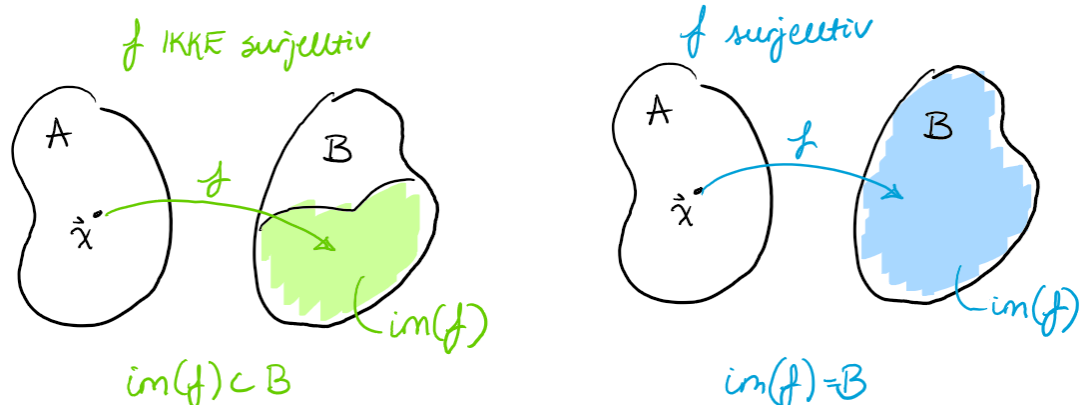


Definisjon

Anta at vi har en funksjon $f: A \rightarrow B$.

Bildet til f ($\text{im}(f)$) er mengden av alle elementer i kodomenet som treffes av funksjonen:

$$\text{im}(f) = \{f(a) | a \in A\}$$



Definisjon

For en funksjon $f: A \rightarrow B$, har vi at f er **bijektiv** dersom f er både **injektiv** og **surjektiv**.

Oppgave 4

La

$$\beta = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

og

$$\mathcal{C} = \left(\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

være basiser for $\mathbb{R}^2$.

- Finn vektoren $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ uttrykt i β -basisen.
- Finn matrisene A og B slik at $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = A[\mathbf{x}]_{\beta}$ og $[\mathbf{x}]_{\beta} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

Teorem 8.16

V n -dimensjonalt vektorrom

$$\beta = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)$$

$$\gamma = (\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n)$$

Da finnes $A_{n \times n}$ s.a.

$$[\vec{x}]_\gamma = A[\vec{x}]_\beta, \quad \forall \vec{x} \in V$$

hvor kolonnene i A er γ -koordinatvektorene i β :

$$A = \left([\vec{\beta}_1]_\gamma \quad [\vec{\beta}_2]_\gamma \quad \dots \quad [\vec{\beta}_n]_\gamma \right)$$

Alt 1:

$$\text{I) } \vec{c}_1 = b_1 \vec{b}_1 + b_2 \vec{b}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{II) } \vec{c}_2 = b_3 \vec{b}_1 + b_4 \vec{b}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{c}_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{I) } \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ 3 & 2 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 13/5 \\ 0 & 1 & | & -7/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$$

$$\text{II) } \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 5 \\ 3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -7/5 \\ 0 & 1 & | & 13/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_3 \\ b_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}}}$$

Eksamen kont 2019

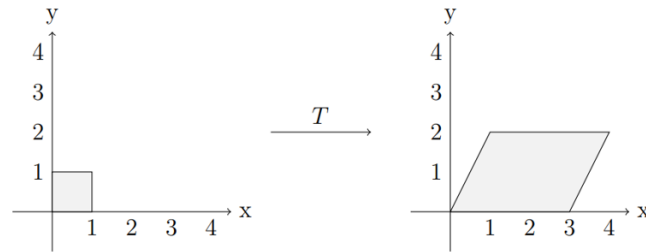
Oppgave 3

En lineærtransformasjon $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbilder firkanten med hjørner i

$$(0,0), (1,0), (0,1) \text{ og } (1,1)$$

til parallellogrammet utspent av

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Finn standardmatrisen A til T og regn ut $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Finn $\ker(T)$. Er T surjektiv?

Mål:

1. Finne matrisen A for T .
2. Finne $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
3. Finne $\ker(T)$
4. T surjektiv?

«Yndlingsteorem» (utdrag)

A $n \times n$ -matrise.

Lineærtransformasjonen $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved $T_A(x) = Ax$ er *surjektiv*

$\Leftrightarrow$

$$\det(A) \neq 0.$$

Se https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4115/2025v/15-inverterbarhet.pdf for fullstendig versjon.

Oppgave 5

b) Finn en basis γ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[p]_\gamma = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

Er koordinatene til et andregradspolynom p .

c) La p være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til p med hensyn på γ .

