Plenumsregning 7: Projeksjon

# Eksamen høst 2015

## Oppgave 6

La

$u=\left[\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right], v=\left[\begin{matrix}1\\2\\4\end{matrix}\right], w=\left[\begin{matrix}4\\-1\\-1\end{matrix}\right]$*.*

Finn en lineærkombinasjon av $u$og $ v$ som er ulik nullvektoren og som er ortogonal til $w$.

Definisjon (forkortet)

En ***ortogonal mengde*** er en mengde av ikke-null vektorer $u\_{1} u\_{2}, …, u\_{n} $s.a.

$$\left〈u\_{i}, u\_{k}\right〉=0$$

$∀u\_{i}, u\_{k}$ i mengden med $i\ne k$.

Ekstraoppgaver

## Oppgave 1

Vis at vektorene
$\left[\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\right]$*,* $\left[\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right]$ og$\left[\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right]$utgjør en ortogonal basis for $R^{3}$, og finn koordinatene til $\left[\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right]$ i denne basisen.

Teorem 9.10

En ortogonal mengde er lineært uavhengig:

$\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\} $ortogonale $⇒$ $\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\}$ lineært uavhengige.

Teorem 5.14

$v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}$er lineært uavhengige $⇔ Sp\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\}=R^{n}$

En **basis** for et vektorrom $V$ er en liste

$$β=(β\_{1}, β\_{2}, ..., β\_{n})$$

av vektorer i $V$ som både *utspenner* $V$ og er *lineært uavhengige.*

Definisjon

## Oppgave 2

Finn det ortogonale komplementet til underrommet utspent av

$\left[\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right]$ og$\left[\begin{matrix}-1\\0\\2\end{matrix}\right]$*.*

Teorem 9.12

$$dim(U)+dim(U^{⊥})=dim(V)$$

## Oppgave 3

La$v=\left[\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right].$

1. Regn ut den ortogonale projeksjonen av $u=\left[\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right]$ på $v.$
2. Finn standardmatrisen $A$ til $P\_{\vec{v} }$.
3. Gi et geometrisk argument for å avgjøre om $P\_{v }$ er surjektiv og/eller injektiv.

Teorem 8.9

En lineærtransformasjon $T:V\rightarrow V$ er *injektiv* $⇔ker\left(T\right)=\left\{0\right\}.$

Teorem 8.14 (forkortet)

$T:R^{n}\rightarrow R^{m}$ lineærtransformasjon. $A$ er standardmatrisen til T.

Da vet vi:

T surjektiv $⇔$ $Sp\{kolonnene i A\}$=$R^{m}$.

1. Gi et geometrisk argument for å bestemme dimensjonen til $ker(P\_{v}), Null(A)$, $im(P\_{v})$ og $Col(A)$.

Teorem 8.11 (forkortet)

$A\_{m×n}$. $T:R^{n}\rightarrow R^{m}$ lineær transformasjon gitt ved $T\left(x\right)=Ax$.

Da er $ker(T)=Null(A)$ og $im(T)=Col(A)$



## Oppgave 7 (ikke gjennomgått)

La

$u=\left[\begin{matrix}2\\-5\end{matrix}\right]$og$v=\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right]$*.*

* Finn den ortogonale projeksjonen av $u$ på$v$.
* Tegn$u$, $v$ og projeksjonen i samme koordinatsystem.
* Hva er vinkelen mellom vektorene?

# Eksamen høst 2018

## Oppgave 6

Finn en ortogonal basis for underrommet av $R^{4}$ utspent av disse vektorene

$v\_{1}=\left[\begin{matrix}2\\1\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{matrix}\right], v\_{2}=\left[\begin{matrix}1\\0\\\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\end{matrix}\right], v\_{3}=\left[\begin{matrix}1\\1\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{matrix}\right]$, $v\_{4}=\left[\begin{matrix}2\\1\\\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\end{matrix}\right]$

**Gram-Schmidt-metoden:**

Gitt en basis $v\_{1}, v\_{2},..., v\_{k},$ kan vi vha. følgende prosess finne en *ortogonal* basis $u\_{1}, u\_{2},..., u\_{k}$:

$$u\_{1}=v\_{1}$$

$$u\_{2}=v\_{2} - p\_{u\_{1}}(v\_{2})$$

$$u\_{3}=v\_{3} - p\_{u\_{1}}(v\_{3})-p\_{u\_{2}}(v\_{3})$$

$$\vdots $$

$$u\_{k}=v\_{k} -\sum\_{j=1}^{k-1}p\_{u\_{j}}(v\_{k})$$

V

Visuell forståelse av Gram-Schmidt-metoden: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Gram-Schmidt_orthonormalization_process.gif>