

Plenumsregning 7: Projeksjon

Eksamen høst 2015

Oppgave 6

La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Finn en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som er ulik nullvektoren og som er ortogonal til $\mathbf{w}$.

Definisjon (forkortet)

En **ortogonal mengde** er en mengde av ikke-null vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ s.a.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = 0$$

$\forall \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k$ i mengden med $i \neq k$.

.

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Vis at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgjør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og finn koordinatene til $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i denne basisen.

Teorem 9.10

En ortogonal mengde er lineært uavhengig:

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ortogonale $\Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineært uavhengige.

Teorem 5.14

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige $\Leftrightarrow \text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n$

Definisjon

En **basis** for et vektorrom V er en liste

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

av vektorer i V som både *utspenner* V og er *lineært uavhengige*.

Oppgave 2

Finn det ortogonale komplementet til underrommet utspent av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Teorem 9.12

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

Oppgave 3

La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- a) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}$.

b) Finn standardmatrisen A til $P_{\vec{v}}$.

- c) Gi et geometrisk argument for å avgjøre om P_v er **surjektiv** og/eller **injektiv**.

Teorem 8.9

En lineærtransformasjon $T: V \rightarrow V$ er *injektiv* $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorem 8.14 (forkortet)

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineærtransformasjon. A er standardmatrisen til T .

Da vet vi:

T surjektiv $\Leftrightarrow \text{Sp}\{\text{kolonnene i } A\} = \mathbb{R}^m$.

- d) Gi et geometrisk argument for å bestemme dimensjonen til $\ker(P_v)$, $\text{Null}(A)$, $\text{im}(P_v)$ og $\text{Col}(A)$.

Teorem 8.11 (forkortet)

$A_{m \times n}$. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineær transformasjon gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Da er $\ker(T) = \text{Null}(A)$ og $\text{im}(T) = \text{Col}(A)$ 

Oppgave 7 (ikke gjennomgått)

La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$.
- Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem.
- Hva er vinkelen mellom vektorene?

Eksamen høst 2018

Oppgave 6

Finn en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av disse vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gram-Schmidt-metoden:

Gitt en basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, kan vi vha. følgende prosess finne en *ortogonal* basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - p_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - p_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - p_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3)$$

$\vdots$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k)$$

Visuell forståelse av Gram-Schmidt-metoden:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Gram-Schmidt_orthonormalization_process.gif