

Plenumsregning 8: Mer om projeksjon

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$, $C([0, 1])$, med indreproduktet definert i Teorem 9.22. Regn ut indreproduktet, finn vinkelen og avgjør om de er ortogonale:

a) $-x$ og e^x

Teorem 9.22

Operasjonen

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

er et indreprodukt på $C([a, b])$.

$$\text{Husk: } \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$\text{Husk: } \langle f, g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cdot \cos \theta$$

Eksamen høst 2019

Oppgave 5

La $V = P_2(\mathbb{R})$, dvs V er vektorrommet av alle polynomer av grad 2 eller mindre med reelle koeffisienter. La $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

- a) Oppgi definisjonen av et reelt indreprodukt. Vis at funksjonen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt på V .

Definisjon

Et **indreprodukt** på et reelt vektorrom V er en funksjon $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ som oppfyller:

- 1) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ (Symmetri)
- 2) $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (Linearitet)
- 3) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ kun dersom $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Positivitet)

Vi sier at V , sammen med et valgt indreprodukt, er et **indreproduktrom**.

Eksamen vår 2022

Oppgave 4

Bestem om funksjonene

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \sin(x),$$

er ortogonale i indreproduktrommet $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, når indreproduktet er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Hvis ikke, finn en ortogonal basis for det lineære spennet $\text{span}(f_1, f_2, f_3)$ ved å bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode.

Eksamen høst 2023

Oppgave 5

Avgjør om polynomene

$$p(t) = 2 - t, \quad q(t) = 1 + t^2 \quad \text{og} \quad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikke i $P_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynomer.

Finn så ut om p og q står ortogonalt på hverandre med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^2 f(k)g(k), \quad f, g \in P_2(\mathbb{R})$$

Eksamen kont 2021

Oppgave 8

Vi ser på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

på rommet $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 2\pi]$ til $\mathbb{R}$.

- a) Finn en ortonormal basis for $U = \text{Sp}\{\sin(x), \cos(x)\}$.

b) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $f(x) = x$ ned på U .

- c) Forklar hvorfor $\cos(x + \pi/4)$ er i U , og finn koordinatvektoren til $\cos(x + \pi/4)$ med hensyn på basisen du fant i a).

Innlevering 3

Oppgave 13

La $D: P \rightarrow P$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G: P \rightarrow P$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x :

$$G(p) = q, \quad q(x) = x \cdot p(x)$$

- e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n: P_n \rightarrow P_{n-1} \text{ og } G_n: P_{n-1} \rightarrow P_n$$

På samme måte som vi definerte D og G . Velg en passende basis for hvert av vektorrommene P_2 og P_3 , finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

