Plenumsregning 9: Egenverdier, egenvektorer og egenrom

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

a) Regn ut egenverdiene, egenvektorene og egenrommene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisjon

$T: V \to V$ lin.trans.

En skalar λ er en ***egenverdi*** for T hvis $\exists \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ s.a.

$$T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$ er da en ***egenvektor*** for T, *tilhørende* λ.

Dersom T er gitt ved en matrise $n \times n$-matrise A sier vi at $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for A *tilhørende* egenverdien λ.

Teorem

$M_{n\times n}$:

$M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har kun triviell løsning $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \det(M) \neq 0$

b) Skissér egenrommene.

Definisjon

$T: V \to V$ lin.trans.

λ egenverdi for T.

Da er **egenrommet** til λ *mengden av alle egenvektorer til* λ *og* $\mathbf{0}$*:*

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

Oppsummering

1) Finne *egenverdier* ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$.
2) Finne *egenvektorer* ved å løse $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
3) *Egenrommet* tilhørende en gitt egenverdi kan beskrives som spennet av egenverdiens tilhørende egenvektor(er).

Oppgave 3

Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke.
Begrunn svaret ditt.

a) En $n \times n$-matrise A har alltid n egenverdier.

b) Dersom A har en ikke-null egenverdi λ, så kan ikke A være lik null-matrisen.

c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

Oppgave 4

La A være en $n \times n$-matrise. Vis at A og dens transponerte A^T har like egenverdier.

Teorem 10.9

$A_{n \times n}$.

Egenverdiene til A er alle løsninger λ av

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Oppgave 7

Finn hver matrises determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eksamen Kont 2018

Oppgave 6

a) La P være en kvadratisk matrise slik at $P^2 = P$. Vis at egenverdiene til P kun kan være 0 eller 1.

b) Gi et eksempel på en 2×2-matrise P slik at $P^2 = P$ og som har egenverdier 0 **og** 1.

c) Gi et eksempel på en 2×2-matrise P som har egenverdier 0 eller 1 eller begge, og som **ikke** tilfredsstiller $P^2 = P$.

Eksamen vår 2018

Oppgave 6

a) Fullfør utsagnet til en definisjon: «Et tall λ er en **egenverdi** til en kvadratisk (square) matrise A dersom…»

Definisjon

En skalar λ er en **egenverdi** til $A_{n\times n}$ dersom det finnes en $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ s.a.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

b) Finn en matrise A slik at

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 2, og

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 3.

Oppgave X

Anta at A er en $n \times n$-matrise, og at $\boldsymbol{y}$ og $\boldsymbol{z}$ er lineært uavhengige egenvektorer til A med korresponderende egenverdi 2. La $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z}$. Er $\boldsymbol{v}$ en egenvektor til A?

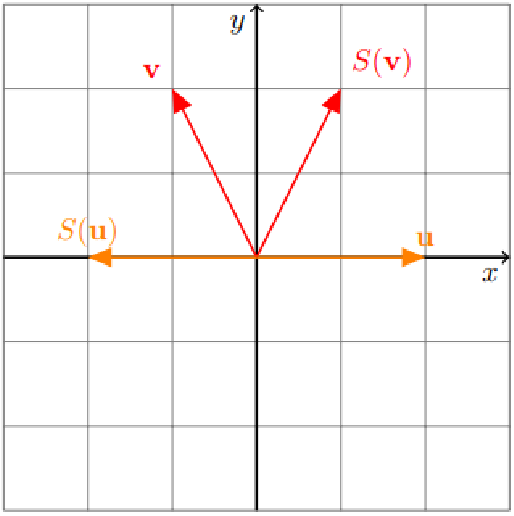
- ☐ Ja, $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor til A med egenverdi 2.
- ☐ Ja, $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor til A med egenverdi 5.
- ☐ Nei, $\boldsymbol{v}$ er ikke en egenvektor til A.

Wawro, M., Watson, K., & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education, 51*(7), 1111–1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8

Eksamen vår 2022

Oppgave 7

La $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon som speiler vektorer i $\mathbb{R}^2$ om y-aksen:



Hva er egenverdiene til lineærtransformasjonen?

a) 0, -1 og 1
b) 0 og 1
c) -1 og 1
d) Kun 1