Plenumsregning 10: Egenvektorer, egenverdier og **diagonalisering**

# Oppgave 1

For

$$A=\left[\begin{matrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&3\end{matrix}\right]$$

1. Finn **egenverdien(e)** til $A$
2. Finn **egenvektorene** til $A$
3. Avgjør om $A$ er **diagonaliserbar**
4. Dersom $A$ er diagonaliserbar, finn $P $og $D$ slik at $A=PDP^{-1}$.

Definisjon

Teorem 11.3

$A\_{n×n}$ $n$ *forskjellige* egenverdier $⇒$ $A$ diagonaliserbar.

$A\_{n×n}$ **diagonaliserbar** hvis $A=PDP^{-1}$ m. $P$ inverterbar, $D$ diagonal.

I første del av oppgaven fant vi 3 ulike egenverdier for $A$

## Oppgave 4

La $T:P\_{2}\rightarrow P\_{2}$ være lineærtransformasjonen som deriverer andregradspolynomer:

$$T\left(ax^{2}+bx+c\right)=2ax+b.$$

1. Finn matrisen $A$ til $T$ med hensyn på basisen $\left(1,x,x^{2}\right).$
2. Finn egenverdiene og egenvektorene til $A$. Er $A$ diagonaliserbar?

Teorem 11.2

$A\_{n×n}$ diagonaliserbar $⇔$ $A$ har $n$ lineært uavhengige egenvektorer.

## Oppgave 8

La $A=\left[\begin{matrix}r\_{1}&z\\\overbar{z}&r\_{2}\end{matrix} \right] $være en $2×2$-matrise med $r\_{1}, r\_{2}\in R$ og $z\in C.$ Utled en formel for egenverdiene til $A$. Vis at egenverdiene er reelle.

# Eksamen kont 2019

## Oppgave 5

Finn en eksplisitt formel for $A^{n}$ når $n\geq 0$ og

$$A=\left[\begin{matrix}5&3\\-6&-4\end{matrix}\right]$$

¨

Oppgave 6

Skriv ned definisjonen av en diagonaliserbar kvadratisk matrise. Vis at en diagonaliserbar$ 2×2$-matrise med egenverdi med algebraisk multiplistet to må være diagonal.

Definisjon

$A\_{n×n}$ er **diagonaliserbar** hvis $∃D\_{n×n}$ diagonal og $P\_{n×n}$ inverterbar s.a.

$$A=PDP^{-1}$$

Definisjon (forkortet)

Et $n$-te gradspolynom har $n$ komplekse løsninger (når vi teller med multiplisitet). Når $λ\_{k} $er en løsning til det karakteristiske polynomet med multiplisitet $m$, sier vi at $λ\_{k}$ er en egenverdi med **algebraisk multiplisitet** $m$.

# Eksamen høst 2018

## Oppgave 7

La R være følgende matrise:

$$R=\left[\begin{matrix}{1}/{2}&{\sqrt{3}}/{2}\\-{\sqrt{3}}/{2}&{1}/{2}\end{matrix}\right]$$

Regn ut $R^{42}.$

# Eksamen høst 2014

## Oppgave 4 (forkortet)

Gitt matrisen

$$A=\left[\begin{matrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{matrix}\right]$$

1. Avgjør om $A$ er diagonaliserbar.

Definisjon

En reell matrise kalles **symmetrisk** dersom $A=A^{T}$.

Teorem 11.14

La A være en symmetrisk $n×n$-matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliser (som en reell matrise).

1. Finn en ortonormal basis av egenvektorer for $A$.

Teorem 11.16

La A være en symmetrisk $n×n$-matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliser (som en reell matrise).

1. Finn en inverterbar matrise $P$ og en diagonal matrise $D$ slik at $A=PDP^{-1}$.