Plenumsregning 10: Egenvektorer, egenverdier og **diagonalisering**

Oppgave 1

For

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Finn **egenverdien(e)** til A
2) Finn **egenvektorene** til A
3) Avgjør om A er **diagonaliserbar**
4) Dersom A er diagonaliserbar, finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$.

Definisjon

$A_{n\times n}$ **diagonaliserbar** hvis $A = PDP^{-1}$ m. P inverterbar, D diagonal.

Teorem 11.3

$A_{n\times n}$ n *forskjellige* egenverdier $\Rightarrow$ A diagonaliserbar.

Oppgave 4

La $T: P_2 \to P_2$ være lineærtransformasjonen som deriverer andregradspolynomer:

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

Teorem 11.2

$A_{n\times n}$ diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A har n lineært uavhengige egenvektorer.

Oppgave 8

La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A. Vis at egenverdiene er reelle.

Eksamen kont 2019

Oppgave 5

Finn en eksplisitt formel for A^n når $n \geq 0$ og

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

..

Oppgave 6

Skriv ned definisjonen av en diagonaliserbar kvadratisk matrise. Vis at en diagonaliserbar 2×2-matrise med egenverdi med algebraisk multiplistet to må være diagonal.

Definisjon

$A_{n\times n}$ er **diagonaliserbar** hvis $\exists D_{n\times n}$ diagonal og $P_{n\times n}$ inverterbar s.a.

$$A = PDP^{-1}$$

Definisjon (forkortet)

Et n-te gradspolynom har n komplekse løsninger (når vi teller med multiplisitet). Når λ_k er en løsning til det karakteristiske polynomet med multiplisitet m, sier vi at λ_k er en egenverdi med **algebraisk multiplisitet** m.

Eksamen høst 2018

Oppgave 7

La R være følgende matrise:

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Regn ut R^{42}.

Eksamen høst 2014

Oppgave 4 (forkortet)

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Avgjør om A er diagonaliserbar.

Definisjon

En reell matrise kalles **symmetrisk** dersom $A = A^T$.

Teorem 11.14

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliser (som en reell matrise).

b) Finn en ortonormal basis av egenvektorer for A.

Teorem 11.16

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliser (som en reell matrise).

c) Finn en inverterbar matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$.