

Plenumsregning 11: Interpolasjon, regresjon og Markov-kjeder

Eksamen høst 2018

Oppgave 4

Se på de tre punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^2.$$

- a) Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene.

- b) Bruk minste kvadraters metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer til de tre punktene.

Definisjon

$\hat{x}$ er den *minste kvadraters løsning* for $Ax = b$.

Teorem 12.1 (forkortet)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Da er mengden av minste kvadraters løsninger for $Ax = b$ lik løsningsmengden for

$$A^T(Ax - b) = 0$$

Hvis $A^T A$ inverterbar, finnes det for enhver b en unik minste kvadraters løsning $\hat{x}$.

c) Tegn grafene til p og q .

Ekstraoppgaver

Oppgave 4

Finn likevektsvektorene for de stokastiske matrisene

a) $C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

Definisjon

En **sannsynlighetsvektor** er en vektor $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \dots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ hvor $0 \leq v_i \leq 1$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og hvor $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$.

$M_{n \times n}$ er en **stokastisk matrise** hvis kolonnene i M er sannsynlighetsvektorer.

M stokastisk matrise.

En **likevektsvektor** $\mathbf{v}$ for M er en vektor som oppfyller følgende betingelser:

- 1) Er en egenvektor for M .
- 2) Har tilhørende egenverdi $\lambda = 1$.
- 3) En sannsynlighetsvektor.

Eksamen vår 2019

Oppgave 5

Et emne i lineær algebra foreleses i to paralleller, en i S7 og en i S8. Begge foreleserne er like dårlige, og derfor bytter studentene parallell ofte.

Sannsynligheten for at en student bytter parallell etter en gitt forelesningsuke er 40 %.

Bestem en stokastisk matrise M som beskriver denne prosessen. Parallellene er ved semesterstart satt opp med henholdsvis 180 og 140 studenter. Hvordan vil studentene fordele seg etter 14 forelesningsuker? Anta at studentene er svært pliktoppfyllende og at ingen slutter å gå i forelesning.

Eksamen kont 2018

Oppgave 5

I følge meteorolog Y_r eksisterer det et land N som er velsignet med mange ting, men ikke med solrikt vær. Det er aldri to dager med sol på rad. Dersom det er sol en dag, er det like stor sannsynlighet for at det regner som at det snør påfølgende dag. Dersom det er snø eller regn en dag, er det like stor sannsynlighet for å få det samme været – som å ikke få det samme været – påfølgende dag. Dersom det er en endring fra snø eller regn fra en dag til den neste, er det bare halvparten av gangene sol påfølgende dag.

- a) Hva er den stokastiske matrisen for denne markov-kjeden?

b) På lang sikt, hvor mange dager – av alle (i %) – er det sol?

Teorem 12.1

$M_{n \times n}$ regulær, stokastisk.

Da har M en unik likevektsvektor $\mathbf{q}$.

For enhver utgangssannsynlighetvektor $\mathbf{x}_0$ konvergerer markovkjeden $\{\mathbf{x}_n\}$ til $\mathbf{q}$ når $n \rightarrow \infty$

Definisjon

En stokastisk matrise M kalles **regulær** hvis det finnes n slik at alle elementene til M^n er strengt positive.

Ekstraoppgaver

Oppgave 6

La S være $1 \times n$ -matrisen med 1 i alle kolonnene, dvs. $S = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$.

- a) Forklar hvorfor en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ er en sannsynlighetsvektor hvis og bare hvis alle koordinatene er ikke-negative og $S\mathbf{x} = 1$.

Definisjon

En **sannsynlighetsvektor** er en vektor $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \dots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ hvor $0 \leq v_i \leq 1$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og hvor $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$.

$M_{n \times n}$ er en **stokastisk matrise** hvis kolonnene i M er sannsynlighetsvektorer.

b) La P være en stokastisk $n \times n$ -matrise. Vis at $SP = S$.

