Plenumsregning 12: System av differensiallikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

Finn generell løsning av $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

Teorem 13.8

$A_{n\times n}$ diagonaliserbar,

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lin.uavh. egenvektorer med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da er

$$\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} \dots \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en basis for løsningsrommet til $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$. Dvs.

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en generell løsning av $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$.

Lin.komb. av vektorene

Oppgave 3

Løs initialverdiproblemene $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 1

Finn generell løsning av systemet $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ og skissér faseplottet når

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Fasediagram: To distinkte, reelle røtter

$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{e^{\lambda t}}$	$\boldsymbol{v e^{\lambda t}}$
$> \mathbf{0}$ (pos.)	øker	bort fra origo
$= \mathbf{0}$	konstant	står i ro
$< \mathbf{0}$ (neg.)	minker	mot origo

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Teorem 13.16

$\alpha + i\beta \neq 0$ kompleks egenverdi for A, $\boldsymbol{v}$ tilhørende egenvektor.

Da danner

$$\boldsymbol{y}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \cdot \cos(\beta t) - \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) \cdot \sin(\beta t))$$

og

$$\boldsymbol{y}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \cdot \sin(\beta t) + \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) \cdot \cos(\beta t))$$

en basis for reelt løsningsrom til

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$$

Fasediagram: To distinkte, komplekse røtter

$$z = \alpha + \beta i, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$\boldsymbol{\alpha}$	bevegelse
$> \mathbf{0}$ (pos.)	spiral <u>bort</u> fra origo
$= \mathbf{0}$	sirkulær
$< \mathbf{0}$ (neg.)	spiral <u>mot</u> origo

Oppgave 8

Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$$

Med en gitt initialverdi $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

<u>Husk:</u> Dersom λ_i er en egenverdi til A, er den **algebraiske multiplisiteten** til λ_i lik dens orden (altså eksponenten) som rot i $\det(A - \lambda I_n)$.

Den **geometriske multiplisiteten** til en egenverdi er antall lineært uavhengige egenvektorer assosiert med den, dvs. dimensjonen til nullrommet av $(A - \lambda I_n)$.

Teorem 4.20 + 6.12 (utdrag fra «Yndlingsteoremet)

$A_{n\times n}$, $\boldsymbol{b}_{n\times 1}$ vektor

i) A inverterbar $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en entydig løsning.

ii) A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Eksamen høst 2018

Oppgave 3

Finn generell løsning av systemet

$$y_1' = 7y_1 - 2y_2$$
$$y_2' = 2y_1 + 2y_2$$

og skissér fasediagrammet.

Fasediagram: To distinkte, reelle røtter

$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{e^{\lambda t}}$	$\boldsymbol{ve^{\lambda t}}$
$> \mathbf{0}$	øker	bort fra origo
$= \mathbf{0}$	konstant	står i ro
$< \mathbf{0}$	minker	mot origo

Eksamen vår 2017

Oppgave 6

La $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) Løs initialverdiproblemet

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

og finn $\boldsymbol{x}(5)$.