

Plenumsregning 12: System av differensielllikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

Finn generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

Teorem 13.8

$A_{n \times n}$ diagonalisierbar,

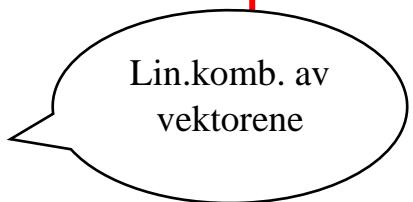
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ lin.uavh. egenvektorer med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da er

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \dots \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Dvs.

$$c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.



Lin.komb. av vektorene

Oppgave 3

Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}', \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 1

Finn generell løsning av systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og skissér faseplottet når

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Fasediagram: To distinkte, reelle røtter

λ	$e^{\lambda t}$	$ve^{\lambda t}$
> 0 (pos.)	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0 (neg.)	minker	mot origo

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorem 13.16

$\alpha + i\beta \neq 0$ kompleks egenverdi for A , \mathbf{v} tilhørende egenvektor.

Da danner

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\alpha t} (\operatorname{Re}(\mathbf{v}) \cdot \cos(\beta t) - \operatorname{Im}(\mathbf{v}) \cdot \sin(\beta t))$$

og

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t} (\operatorname{Re}(\mathbf{v}) \cdot \sin(\beta t) + \operatorname{Im}(\mathbf{v}) \cdot \cos(\beta t))$$

en basis for reelt løsningsrom til

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

Fasediagram: To distinkte, komplekse røtter

$$z = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

α	bevegelse
> 0 (pos.)	spiral <u>bort</u> fra origo
$= 0$	sirkulær
< 0 (neg.)	spiral <u>mot</u> origo

Oppgave 8

Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

Med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

Husk: Dersom λ_i er en egenverdi til A , er den **algebraiske multiplisiteten** til λ_i lik dens orden (altså eksponenten) som rot i $\det(A - \lambda I_n)$.

Den **geometriske multiplisiteten** til en egenverdi er antall lineært uavhengige egenvektorer assosiert med den, dvs. dimensjonen til nullrommet av $(A - \lambda I_n)$.

Teorem 4.20 + 6.12 (utdrag fra «Yndlingsteoremet»)

$A_{n \times n}$, $\mathbf{b}_{n \times 1}$ vektor

- i) A inverterbar $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning.
- ii) A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Eksamens høst 2018

Oppgave 3

Finn generell løsning av systemet

$$y'_1 = 7y_1 - 2y_2$$

$$y'_2 = 2y_1 + 2y_2$$

og skissér fasediagrammet.

Fasediagram: To distinkte, reelle røtter

λ	$e^{\lambda t}$	$ve^{\lambda t}$
> 0	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0	minker	mot origo

Eksamensvar 2017

Oppgave 6

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A .

b) Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

og finn $\mathbf{x}(5)$.