Plenumsregning 13: Andre ordens differensiallikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 1-2 c)

En modifisert oppgave 😊

Gitt følgende andreordens differensiallikning

$$y'' + y = 0$$

i. Skriv om til et system av førsteordens differensiallikninger.

ii. Finn en generell basis for løsningsrommet og skriv generell løsning.

En modifisert oppgave 😊

Teorem 14.2 (forkortet)

Løsningsmengden til en homogen, annenordens differensiallikning

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt, reelt vektorrom utspent av to lineært uavhengige funksjoner. Vi har 3 ulike tilfeller:

1) $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
2) $y_1(t) = e^{at}\cos(bt)$ og $y_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ hvis $\lambda_1 = \mathrm{a} + \mathrm{bi},\ \lambda_2 = \bar{\lambda},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
3) $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = te^{\lambda t}$ hvis $\lambda \in \mathbb{R}$

Oppgave 3 b)

Finn en partikulær løsning for

$$y'' + y = \cos(t)$$

Teorem 14.6 (omskrevet)

Alle løsninger til den inhomogene likningen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

er på formen

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

der $y_p(t)$ er en partikulær løsning og $y_h(t)$ er en løsning til den tilsvarende homogene likningen.

For en *inhomogen, annenordens differensiallikning*, dvs. en likning på formen

$$y''(t) + a_1 y(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

kan vi finne en **partikulær løsning**, y_p, ved hjelp av følgende formel:

$$y_{p(t)} = y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\,dt - y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\,dt$$

$$\boxed{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1}$$

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$$

$$\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Vi vet at:

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

Eksamen høst 2019

Oppgave 2

Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

Teorem 14.2 (forkortet)

Løsningsmengden til en homogen, annenordens differensiallikning

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt, reelt vektorrom utspent av to lineært uavhengige funksjoner. Vi har 3 ulike tilfeller:

4) $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
5) $y_1(t) = e^{at}\cos(bt)$ og $y_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ hvis $\lambda_1 = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
6) $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = te^{\lambda t}$ hvis $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{p(t)} &= y_2(t) \int \frac{y_1(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt \\ &\quad - y_1(t) \int \frac{y_2(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt \end{aligned}}$$

Eksamen vår 2017

Oppgave 2 a)

Finn to lineært uavhengige løsninger av den homogene differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Eksamen høst 2017

Oppgave 4

Likningen for en udempet tvungen harmonisk bevegelse er gitt ved

$$y''(t) + y(t) = \cos(t - 2)$$

a) Finn den generelle løsningen til den homogene likningen.

b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene likningen.

Eksamen høst 2023

Oppgave 6

Bestem generell løsning til differensiallikningen

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2t} - 36t.$$

1. **Grunnregel:**

$$
\begin{array}{cc}
\textbf{Hvis } f(t) \textbf{ er} & \textbf{Gjett} \\
p(t) & q(t) \\
Ke^{ct} & ae^{ct} \\
p(t)e^{ct} & q(t)e^{ct} \\
\left.\begin{array}{c} K\cos(\omega t) \\ K\sin(\omega t) \end{array}\right\} & a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) \\
\left.\begin{array}{c} p(t)\cos(\omega t) \\ p(t)\sin(\omega t) \end{array}\right\} & q(t)\sin(\omega t) + r(t)\cos(\omega t) \\
\left.\begin{array}{c} Ke^{ct}\cos(\omega t) \\ Ke^{ct}\sin(\omega t) \end{array}\right\} & e^{ct}[a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)]
\end{array}
$$

   hvor $f(t)$ er av samme grad som $q(t)$ og $r(t)$ der de opptrer,

2. **Modifikasjon:** Hvis en del av ditt gjett for $y_p(t)$ er en løsning av den homogene likningen; multipliser med t. Hvis løsningen korrepsonderer til en dobbelrot; multipliser med t^2.

3. **Summering:** Hvis $f(t)$ er en sum av funksjoner fra tabellen; velg $y_p(t)$ som en sum av de tilhørende gjettene.