Eksempel 5.3.4:
Bestem utsvinget $y(t)$ til et dempet masse-fjær-system som er beskrevet av

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= r(t), \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

når $r(t)$ er en firkantpuls $[r(t) = u(t-1) - u(t-2)]$ og en idealisert impuls $[r(t) = \delta(t-1)]$.

Løsning:

Vi beregner først Laplacetransformasjonen av likninga:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y'' + 3y' + 2y\right] &= \mathcal{L}\left[r(t)\right] \\ \mathcal{L}\left[y''\right] + 3\mathcal{L}\left[y'\right] + 2\mathcal{L}\left[y\right] &= \mathcal{L}\left[r(t)\right] \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) &= R(s) \\ Y(s)\left(s^2 + 3s + 2\right) &= R(s) \end{aligned}$$

Løsningen finnes dermed i prinsippet som den invers Laplacetransformerte av $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}R(s) = Q(s)R(s).$$

Idealisert impuls

La først $r(t) = \delta(t-1)$. Da blir

$$\begin{aligned} R(s) &= \mathcal{L}\left[\delta(t-1)\right] \\ &= e^{-s}. \end{aligned}$$

Følgelig er løsningen gitt ved

$$Y(s) = Q(s)R(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+3s+2}$$

Vi kan delbrøksoppspalte impulsresponsen $Q(s)$ som

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+1)} \end{aligned}$$

Koeffisientene A og B finnes fra

$$\frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+1)} = \frac{A(s+1)+B(s+2)}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

Vi setter $s = -2$, og finner $A = -1$. Videre gir $s = -1$ at $B = 1$. Alts

$$Q(s) = -\frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{(s+1)}.$$

Løsningen er dermed gitt som

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{e^{-s}}{(s+2)} + \frac{e^{-s}}{(s+1)} \\
&= -e^{-s}\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] + e^{-s}\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] \\
&= -\mathcal{L}\left[e^{-2(t-1)}u(t-1)\right] + \mathcal{L}\left[e^{-(t-1)}u(t-1)\right]
\end{aligned}
$$

Altså

$$
\underline{\underline{y(t) = \left[e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right] u(t-1)}}
$$

Firkantpuls

La nå $r(t) = u(t-1) - u(t-2)$. Da vil

$$
\begin{aligned}
R(s) &= \mathcal{L}\left[u(t-1) - u(t-2)\right] \\
&= \mathcal{L}\left[u(t-1)\right] - \mathcal{L}\left[u(t-2)\right] \\
&= \frac{e^{-t}}{s} - \frac{e^{-2t}}{s} = \left[e^{-s} - e^{-2s}\right]\frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

Altså

$$
Y(s) = \left[e^{-s} + e^{-2s}\right]\frac{1}{s(s^2+3s+2)}.
$$

Delbrøksoppspalting gir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s(s^2+3s+2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \\
&= \frac{A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)}{s(s+1)(s+2)}
\end{aligned}
$$

med løsninger

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \\
B &= -1 \\
C &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

varslot@math.ntnu.no

Løsningen er derfor gitt ved

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left[e^{-s} - e^{-2s}\right] \left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}\right] \\ &= \left[e^{-s} - e^{-2s}\right] \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right] \\ &= e^{-s}\mathcal{L} \left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right] - e^{-2s}\mathcal{L} \left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right] \end{aligned}$$

Slik at

$$y(t) = u(t-1) \left[\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right] - u(t-2) \left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right]$$

$$\underline{\underline{y(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & ,1 \leq t < 2 \\ -e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} & ,t \geq 2 \end{cases}}}}$$

varslot@math.ntnu.no