11.2-3 Bølgelikninga

Fant for vibrerende streng med faste endepunkter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Randbetingelsene og initialverdiene

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = f(x)$$

$$u(L,t) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

gir entydig løsning.

Likninga beskriver mange former for vibrasjoner, blandt annet lyd.

I 3d vil den være

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Vi skriver

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

varslot@math.ntnu.no

Separasjon av variabler

Ønsker å løse bølgelikninga for vibrerende streng.

- Anta løsning på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

- Sette inn i likninga

$$F''(x)G(t) - \frac{1}{c^2}F(x)\ddot{G}(t) = 0$$

- Lage to separate likninger

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = k$$

- Løse for $F(x)$

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$$

- Tilpasse randbetingelsene gir at $k = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 < 0$

$$F(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

- Løse for $G(t)$

$$G(x) = a\cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) + b\sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)$$

- Vi har altså en løsning

$$u_n(x,t) = \left[a_n\cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

varslot@math.ntnu.no

Vi observerer at summen av slike løsninger også tilfredsstiller randbetingelsene.

- Bruker superposisjonsprinsippet til å lage en generell løsning

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

- Tilpasser initsialbetingelsene

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = f(x) \\
u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\pi n}{L} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = g(x)
\end{aligned}$$

- Vi finner a_n og b_n fra Fourierkoeffisientene til odde periodiske utviklingen av $f(x)$ og $g(x)$.

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx, \quad \frac{c\pi n}{L} b_n = \frac{2}{L}\int_0^2 g(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

Løsningen er gitt ved

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Eksempel

Finn løsningen av

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

med betingelser

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & u(x,0) &= \sin^3 x \\ u(\pi,t) &= 0, & u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Løsning:

Ved separasjon av variabler finner vi at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)\right] \sin(nx)$$

Vi kan bruke at $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ til å skrive

$$\begin{aligned} \sin^3 x = \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) &= \sin x - (\sin x \cos x)\cos x \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \cos x \\ &= \sin x - \frac{1}{4}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x \\ &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \end{aligned}$$

Videre er

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \sin^3 x$$
$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} cnb_n \sin(nx) = 0$$

Altså vil

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 1 \\ -\frac{1}{4}, & n = 3 \\ 0, & ellers \end{cases} \qquad b_n = 0$$

og løsningen er

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{3}{4}\cos(ct)\sin x - \frac{1}{4}\cos(3ct)\sin(3x) \\ &= \frac{3}{8}[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)] - \frac{1}{8}[\sin 3(x+ct) + \sin 3(x-ct)] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4}\sin(x+ct) - \frac{1}{4}\sin 3(x+ct)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4}\sin(x-ct) - \frac{1}{4}\sin 3(x-ct)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin^3(x+ct) + \sin^3(x-ct)\right] \end{aligned}$$

varslot@math.ntnu.no

11.4 D'Alamberts løsning

Generell løsning av bølgelikninga er

$$u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

(vises i boka ved substitusjon)

Det gir at

$$u_t(x,t) = c\Phi'(x+ct) - c\Psi'(x-ct)$$

La $u(x,0) = f(x)$ og $u_t(x,0) = g(x)$, dvs

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ c\Phi'(x) - c\Psi'(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Vi finner

$$\begin{aligned} \Phi'(x) - \Psi'(x) &= \frac{1}{c} g(x) \\ \int_0^x \Phi'(s) - \Psi'(s) ds &= \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \\ \Phi(x) - \Psi(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \end{aligned}$$

Dette gir to likninger og to ukjente for Φ og Ψ. Løser ut og finner

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ \Phi(x) - \Psi(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \end{aligned}$$

varslot@math.ntnu.no

som gir

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds\\ \Psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds\\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_x^0 g(s)ds\end{aligned}$$

Altså

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)\\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]\\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^0 g(s)ds.\end{aligned}$$

Generell løsning er derfor gitt ved

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

Vi trenger altså ikke separasjon av variabler for bølgelikningen i 1D.

Men: separasjon av variabler er en generell teknikk som fungerer på mange andre problemer (IKKE ALLTID!).

11.5 Varmelikninga

Temperaturen u som funksjon av x og t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$	termisk diffusivitet
K	varmeledningsevne
σ	spesifikk varmekapasitet
ρ	tetthet

Betrakt en stav der temperatoren holdes konstant på hver ende:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x)$$
$$u(L,t) = 0$$

Forsøker separasjon av variabler:

Anta $u(x,t) = F(x)G(t)$

Innsatt i PDL

$$F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

gir dette to likninger

$$\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

Vi løser for $F(x)$

$$F'' - kF = 0$$
$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$$

varslot@math.ntnu.no

Ransbetingelsene tilfredsstilles for $u(x,t)$ ved

$$F(0) = 0, \qquad\qquad F(L) = 0.$$

Krever at $k = -p^2 < 0$, dvs

$$\begin{aligned} F(x) &= a\cos px + b\sin px \\ F(0) &= a = 0 \\ F(L) &= b\sin pL = 0 \end{aligned}$$

slik at $p = n\pi/L$.

Vi løser for $G(t)$

$$\begin{aligned} \dot{G} + (nc\pi/L)^2 G = 0 \\ G(t) = c_3 e^{-(nc\pi/L)^2 t} \end{aligned}$$

Løsning som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(nc\pi/L)^2 t}.$$

Generell løsning som tilfredsstiller randkrav er

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(nc\pi/L)^2 t} \\ u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x). \end{aligned}$$

Eksempel:

La $u(x,t)$ tilfredsstille

$$u_t = u_{xx}$$

med rand- og initsialbetingelser

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$$

Finn $u(x,t)$.