Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Frivillig midtsemesterprøve i TMA4120 MATEMATIKK 4K
Løsningsforslag

Hjelpemidler (kode C):
Enkel kalkulator (HP30S)
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Oppgave 1 Vi kan omskrive likninga som følger:

$$y''(t) + y(t) = (t-1)u(t-1)$$

der $u(t)$ er Heaviside-funksjonen.

Laplacetransformasjon av likninga gir

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + Y(s) &= e^{-s}\frac{1}{s^2} \\ Y(s) &= e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2+1)} \\ &= e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right). \end{aligned}$$

Invers Laplacetransformasjon gir altså

$$y(t) = \underline{\underline{(t-1)u(t-1) - \sin(t-1)u(t-1)}}$$

Oppgave 2 Vi skal finne koeffisientene c_n slik at

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Vi har at

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

For $n = 0$:

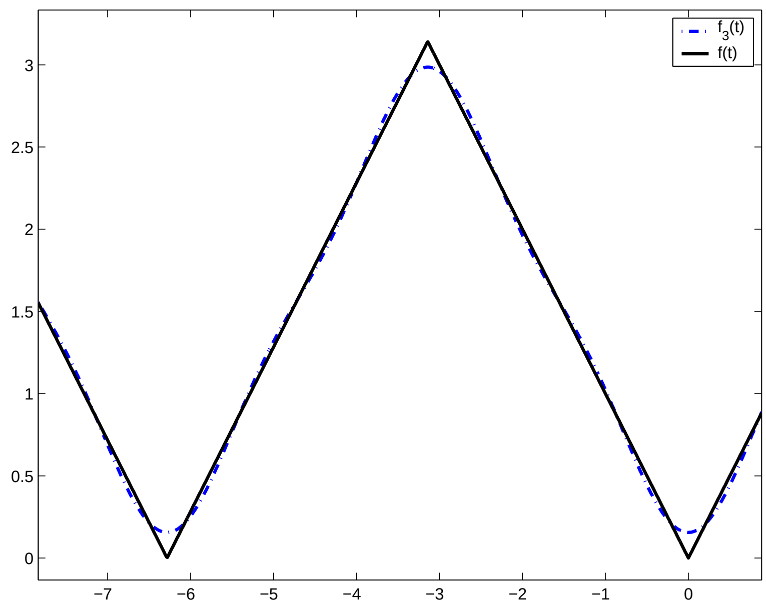
$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tdt = \frac{\pi}{2}$$

For $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -te^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} te^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\Big|_{-\pi}^{0}\frac{e^{-int}}{-in}(-t) + \int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-int}}{-in}dt + \Big|_{0}^{\pi}\frac{e^{-int}}{-in}(t) - \int_{0}^{\pi}\frac{e^{-int}}{-in}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{n}\sin(n\pi) + \frac{2}{n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)\right] \\
&= \frac{(\cos(n\pi) - 1)}{\pi n^2} \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ like, } n \neq 0 \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & n \text{ odde} \end{cases}
\end{aligned}$$

Altså

$$\underline{\underline{c_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ like, } n \neq 0 \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & n \text{ odde} \end{cases}}}$$



Figur 1: Plott av $f_3(t) = \sum_{n=-3}^{3} c_n \exp(int)$ og $f(t)$ for oppgave 2.

Oppgave 3 Kretsen beskrives av likninga

$$v_{inn}(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t)dt,$$

der $I(t)$ er strømmen i kretsen. Fouriertransformasjon av likninga gir:

$$\hat{v}_{inn}(\omega) = R\hat{I}(\omega) + \frac{1}{Ci\omega}\hat{I}(\omega).$$

Altså:

$$\hat{I}(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{Ci\omega}}\hat{v}_{inn}(\omega).$$

Videre er $v_{ut}(t)$ gitt ved

$$v_{ut}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t)dt,$$

slik at

$$\begin{aligned}\hat{v}_{ut}(\omega) &= \frac{1}{Ci\omega}\hat{I}(\omega)\\ &= \frac{1}{Ci\omega}\frac{1}{R+\frac{1}{iC\omega}}\hat{v}_{inn}(\omega)\\ &= \frac{1}{RCi\omega+1}\hat{v}_{inn}(\omega).\end{aligned}$$

Når $\omega \to \infty$ vil $\hat{v}_{ut}(\omega) \to 0$. Når $\omega \to 0$ vil $\hat{v}_{ut}(\omega) \to 1$.

$\underline{\underline{\text{Kretsen er et lavpassfilter}}}$.

Oppgave 4 Laplacetransformasjon av $v(t)$ er

$$V(s) = V_0\mathcal{L}\left[u(t)-u(t-1)\right] = V_0\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right).$$

Likningassett for kretsen er

$$\begin{aligned}R_1I_1(t)+R_2I_2(t) &= v(t)\\ \frac{1}{C}\int_0^t -I_1(t)+I_2(t)dt+R_2I_2(t) &= 0.\end{aligned}$$

Laplacetransformasjon av disse likningene gir

$$\begin{aligned}R_1I_1(s)+R_2I_2(s) &= V(s)\\ -\frac{1}{Cs}I_1(s)+\frac{1}{Cs}I_2(s)dt+R_2I_2(s) &= 0.\end{aligned}$$

Løser ut for I_1, og finner at

$$I_1(s) = .$$

Altså:

$$\begin{aligned}V(s) &= R_1I_2(s)(1+R_2Cs)+R_2I_2(s)\\ &= (R_1+R_2+R_1R_2Cs)\,I_2(s)\\ I_2(S) &= \frac{1}{(R_1+R_2+R_1R_2Cs)}V(s).\end{aligned}$$

Vi finner $V_{ut}(s)$ som

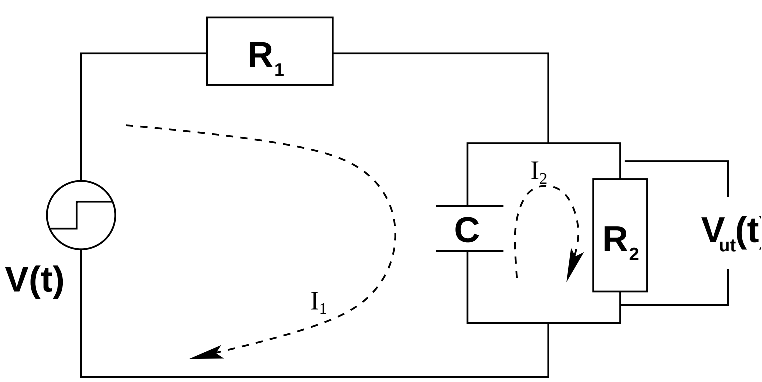
$$\begin{aligned} V_{ut}(s) = R_2 I_2(S) &= \frac{R_2}{(R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s)} V(s) \\ &= \alpha \frac{1}{(1 + R_1 C \alpha s)} V(s), \end{aligned}$$

der $\alpha = \frac{R_2}{R_1+R_2}$. Innsatt $V(s)$ får vi at

$$\begin{aligned} V_{ut}(s) &= \alpha \frac{1}{(1 + R_1 C \alpha s)} V_0 \frac{1}{s} \left(1 - e^{-s}\right) \\ &= V_0 \alpha \frac{1}{s\,(1 + R_1 C \alpha s)} \left(1 - e^{-s}\right) \\ &= V_0 \alpha \left[\frac{1}{s} - \frac{R_1 C \alpha}{(1 + R_1 C \alpha s)} \right] \left(1 - e^{-s}\right) \\ &= V_0 \alpha \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{R_1 C \alpha}} \right] \left(1 - e^{-s}\right) \end{aligned}$$

Invers Laplacetransformasjon gir

$$\begin{aligned} v_{ut}(t) &= V_0 \alpha \left[u(t) - u(t-1) - \left(e^{-\frac{t}{R_1 C \alpha}} - e^{-\frac{t-1}{R_1 C \alpha}} u(t-1) \right) \right] \\ &= \underline{\underline{V_0 \alpha \left[u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C \alpha}} \right) - u(t-1) \left(1 - e^{-\frac{t-1}{R_1 C \alpha}} \right) \right]}}. \end{aligned}$$



Figur 2: Delstrømmene I_1 og I_2 for oppgave 4.