KZ 13.1-2:

- Definerte det komplekse (linje)integralet langs en rettet kurve C ved Riemannsum

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \qquad\qquad \int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Kurven parametriseres ved $z(t) = x(t) + iy(t)$, og forutsettes kontinuelig og stykkevis glatt.

- Kan skrive integralet som

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)(dx + idy) = & \int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy \\ & + i\left[\int_C u(x,y)dy + \int_C v(x,y)dx\right]\end{aligned}$$

- Definer $\vec{F}_r(x,y) = [u, -v]^T$, $\vec{F}_i(x,y) = [v, u]^T$ og $d\vec{x} = [dx, dy]^T$ gir oss to linjeintegral i 2D vektorfelt. Teorien for slike integral kan dermed brukes.

$$\int_C f(z)dz = \int_C \vec{F}_r(x,y)\cdot d\vec{x} + i\int_C \vec{F}_i(x,y)\cdot d\vec{x}$$

varslot@math.ntnu.no

Komplekse integral langs en kurve C parametrisert ved

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

løses ved

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))z'(t)dt$$

Eksempel: Parametriser kurven $z <= r$ ved $z(t) = re^{i2\pi t}$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z}dz &= \int_0^1 \frac{1}{re^{i2\pi t}} i2\pi re^{i2\pi t}dt \\ &= \int_0^1 i2\pi dt = 2\pi i\end{aligned}$$

Eksempel: Tilsvarende vises at for C sirkel om z_0 med radius ρ, vil

$$\int_C (z - z_0)^m = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1 \\ 0, & m \neq -1 \end{cases}$$

varslot@math.ntnu.no

Cauchys integralsetning

Dersom $f(z)$ er analyttisk i enkeltsammenhengende område D, så vil

$$\int_C f(z)dz = 0$$

for alle enkle, lukkede kurver C i D.

Bevis: Følger ved bruk av Greens setning for hvert av vektorintegralene, kombinert med Cauchy-Riemann-likningene.

Brukes bl.a. til å vise at slike integraler bare avhenger av endepunktene:

Setning: Dersom $f(z)$ er analyttisk i enkeltsammenhengende område D, så finnes en analyttisk funksjon $F(z)$ slik at $F'(z) = f(z)$ i D. Dersom en kurve C går fra z_0 til z_1 i D, så vil

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Eksempel: La C være en kurve fra $-i$ til i i det komplekse planet.

$$\begin{aligned}
\int_C \cos z dz &= \Big|_{-i}^{i} \sin z = \sin(i) - \sin(-i) \\
&= 2 \sin i \\
&= 2\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} \\
&= \frac{2}{i}\frac{e^{-1} - e^{1}}{2} = 2i \sinh(1)
\end{aligned}$$

varslot@math.ntnu.no