## Kap 5 Laplace transformasjon

La $f(t)$ være definert for $t \geq 0$.

Laplace transformasjonen er

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

for alle $s \in \mathbb{C}$ der dette er veldefinert.

Tilstrekkelig betingelse:

- $f(t)$ stykkevis kontinuerlig på endelige interval.
- Det finnes konstanter $M$ og $k$ slik at $|f(t)| \leq Me^{-kt}$ for alle $t \geq 0$.

Da er 1 veldefinert for alle $s$ med reell del større enn $k$.

**Eksempel:** Finn $\mathcal{L}\{f(t)\}$ for $f(t) = e^{\alpha t}, t \geq 0$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}dt \\ &= \Big|_0^\infty \frac{1}{\alpha - s}e^{(\alpha-s)t} \\ &= \frac{1}{s-\alpha}. \end{aligned}$$

## Invers Laplace transformasjon

Dersom $F(s)$ er Laplace transformasjon av $f(t)$, så vil

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) e^{st} ds$$

der $C$ er ei linje i det komplekse planet til høyre for alle singulariteter til $F(s)$, som deler planet vertikalt.

Valg at rett linje, og parametrisering av denne gir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c_0 + i\omega) e^{(c_0 + i\omega)t} d\omega$$

Vi beregner invers transformasjon ved bruk at tabeller:

$F(s)$ gjenkjennes som $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$, slik at $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$.

## Nyttige resultater 1.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} &= a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}+b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}\\
\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} &= \frac{1}{s-a}\\
\mathcal{L}\left\{t^{a}\right\} &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \qquad \text{(For heltall } a\text{: } \Gamma(a+1)=a!\text{)}
\end{aligned}
$$

**Eksempel:**

$$\mathcal{L}\left\{\cos\omega t\right\}+i\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\}=\mathcal{L}\left\{\cos\omega t+i\sin\omega t\right\}$$

Slik at

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\cos\omega t+i\sin\omega t\right\} &= \mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\}\\
&= \frac{1}{s-i\omega}\\
&= \frac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)}\\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.
\end{aligned}
$$

varslot@math.ntnu.no

# Nyttige resultater 2

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= F(s-a) \\
\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} &= e^{-as}F(s) \\
\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f^{(0)}(0) - \ldots - s^0 f^{(n-1)}(0) \\
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= \frac{1}{s}F(s)
\end{aligned}$$

Vi betrakter $\delta(t-a)$ som derivert av $u(t-a)$ siden

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-a)\right\} = s\frac{1}{s}e^{-as} = s\mathcal{L}\left\{u(t-a)\right\} - u(0).$$

**Eksempel:** Transformasjon av integral/differensiallikninger

$$y'' + ay' + by + c\int_0^t y(\tau)d\tau = r(t)$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + asY - ay(0) + bY + c\frac{1}{s}Y = R$$

Altså

$$Y(s)\left(s^2 + as + b + c\frac{1}{s}\right) = R(s) + (s+a)\,y(0) + y'(0)$$

Slik at

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s) + (s+a)\,y(0) + y'(0)}{\left(s^2 + as + b + c\frac{1}{s}\right)}\right\}.$$

varslot@math.ntnu.no

## Nyttige resultater 3

$$\mathcal{L}\left\{f * g(t)\right\} = F(s)G(s)$$

der

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Dersom $g$ og $f$ settes til 0 for negative $t$ kan vi skrive

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

**Eksempel:** Finn

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{s^2+as+b}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{s^2+as+b}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)}R(s)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{A}{(s-\alpha_1)} + \frac{B}{(s-\alpha_2)}\right)R(s)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-\alpha_1)}R(s) + \frac{B}{(s-\alpha_2)}R(s)\right\} \\
&= A\int_0^t e^{\alpha_1\tau}r(t-\tau)d\tau + B\int_0^t e^{\alpha_2\tau}r(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \left(Ae^{\alpha_1\tau} + Be^{\alpha_2\tau}\right)r(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

## Kapittel 10 Fouriertransformasjon

La $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ ($f$ er kvadratisk integrerbar).

Kontinuelig Fouriertransformasjon defineres ved

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Tilstrekkelig betingelse for eksistens er at $f$ er stykkevis kontinuelig på endelige intervall.

Invers Fouriertransformasjon er gitt ved

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

**Merk:** Dersom $f(t) = 0$ for $t < 0$.

Dersom $F(s)$ er definert for $s$ med reell del lik 0.

Da vil $F(i\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)$.

Følgelig blir mye regning den samme

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f * g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right\} = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

## Fysisk tolkning:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(\omega)|^2 d\omega$$

uttrykker energiinnhold i signalet mellom frekvensene $\omega_1$ og $\omega_2$.

Invers Fouriertransformasjon gir at:
*"et signal er satt sammen av ulike frekvenserkomponenter ..."*

Dette framkommer også fra Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

**Eksempel:** Masse-fjær-system med ytre kraft $r(t)$ beskrives av

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

Fouriertransformasjon av likninga gir

$$-\omega^2 m\hat{y}(\omega) + i\omega c\hat{y}(\omega) + k\hat{y}(\omega) = \hat{r}(\omega)$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k}\hat{r}(\omega).$$

Resonansfrekvensen til systemet finnes for $c = 0$ ved $-\omega^2 m + k = 0$.

Vi ser at systemet filtrerer ut frekvenser i nærheten av frekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}.$$

varslot@math.ntnu.no

## Fourierrekker

La f(x) være definert ved

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Da er f(x) periodisk med periode 2L.

La $f(x)$ være periodisk med periode 2L, stykkevis kontinuelig, og slik at høyre og venstre deriverte til f(x) eksisterer i hvert punkt i intervallet $[-L, L]$. Da vil

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

i punkter der $f(x)$ er kontinuelig.

Viktige resultat:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \\ L, & \text{for } m = n \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \\ L, & \text{for } m = n \geq 1 \end{cases}$$

Dette brukes til å finne formler for $a_n$ og $b_n$.

varslot@math.ntnu.no

## Periodiske utvidelser

La $f(x)$ være gitt for $0 < x < L$.

Periodisk utvidelse:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{for } 0 < x < L \\ \tilde{f}(x - 2\pi k), & \text{for } k \text{ s.a. } 0 < x - 2\pi k < L \text{ ellers.} \end{cases}$$

Odde periodisk utvidelse:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{for } 0 < x < L \\ -f(-x), & \text{for } -L < x < 0 \\ \tilde{f}(x - 2\pi k), & \text{for } k \text{ s.a. } -L < x - 2\pi k < L \text{ ellers.} \end{cases}$$

Like periodisk utvidelse:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{for } 0 < x < L \\ f(-x), & \text{for } -L < x < 0 \\ \tilde{f}(x - 2\pi k), & \text{for } k \text{ s.a. } -L < x - 2\pi k < L \text{ ellers.} \end{cases}$$

Siden vi er interesert i Fourierrekkeutvikling, og Fourierrekker ikke påvirkes av verdien til funksjonen i ett punkt, spiller det liten rolle hva vi definerer funksjonen til å være i endepunktene 0 og $L$.

varslot@math.ntnu.no

## Komplekse Fourierrekker

Eulers formel gir at Fourierrekka kan skrives som

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx.$$

Dersom vi lar $\hat{f}(\frac{n\pi}{L}) = \sqrt{2L}c_n$ blir

$$\hat{f}(\frac{n\pi}{L}) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{n\pi}{L})e^{i\frac{n\pi x}{L}}.$$

Vi har altså en Fouriertransform for periodiske signaler. Periodiske signaler består av et diskret sett frekvenser.

Fouriertransform som definert i kapittel 10.10 er gjelder ikke for periodiske signaler, da disse ikke er kvadratisk integrerbare.

Denne diskrete varianten kan brukes på differensiallikninger med periodiske funksjoner.

varslot@math.ntnu.no

**Eksempel:**

Løs

$$my'' + cy' + ky = r(t),$$

der $r(t)$ er periodisk med periode $2L$.

Fouriertransformasjon gir

$$m\left(i\frac{n\pi}{L}\right)^2 \hat{y}(\frac{n\pi}{L}) + ci\frac{n\pi}{L}\hat{y}(\frac{n\pi}{L}) + k\hat{y}(\frac{n\pi}{L}) = \hat{r}(\frac{n\pi}{L})$$

$$\hat{y}(\frac{n\pi}{L}) = \frac{\hat{r}(\frac{n\pi}{L})}{-m(\frac{n\pi}{L})^2 + ic\frac{n\pi}{L} + k}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\hat{r}(\frac{n\pi}{L})}{-m(\frac{n\pi}{L})^2 + ic\frac{n\pi}{L} + k}e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{-m(\frac{n\pi}{L})^2 + ic\frac{n\pi}{L} + k}e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

der $c_n$ er de komplekse Fourierkoeffisientene til $r(t)$.

varslot@math.ntnu.no

## Kapittel 11: Partsielle differensiallikninger

Likning med deriverte mhp. flere variabler:

$$u_x + u_{yx} = 0$$

Viktige likninger for oss:

- bølgelikninga: $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$.
- varmelikninga: $c^2 u_{xx} - u_t = 0$.
- Laplace sin likning: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

## Separasjon av variabler

Løsningsmetode som setter sammen en løsning av mange enklere løsninger. Fungerer **ikke** alltid. Den fungerer bare dersom den underliggende antakelsen om at $u(x,t) = \sum_n c_n F_n(x) G_n(t)$ er riktig.

**Eksempel: (bølgelikninga)**

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad \text{for } 0 < x < L,\, t > 0$$

$u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

1. Anta løsning på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$.
2. Sett inn i likninga
$$F_{xx} G - \frac{1}{c^2} F G_{tt} = 0$$
3. Separer i to likninger
$$\frac{F_{xx}}{F} = \frac{1}{c^2} \frac{G_{tt}}{G} = k$$
4. Løs disse likningene
$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$$
$$G(t) = c_3 e^{c\sqrt{k}t} + c_4 e^{-c\sqrt{k}t}$$

5. Tilpass randbetingelsene.

$$u(0,t) = 0 = F(0)G(t) \Rightarrow F(0) = 0$$
$$u(L,t) = 0 = F(L)G(t) \Rightarrow F(L) = 0$$

   Derfor gir bare $k = -p^2$ interessant løsning:

$$F(x) = a_1 \cos(px) + b_1 \sin(px)$$
$$G(t) = a_2 \cos(pct) + b_2 \sin(pct)$$

   Randkrav tilfredsstilt for $p = \frac{n\pi}{L}$ og $a_1 = 0$

   Løsning derfor

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right).$$

6. Bruk superposisjonsprinsippet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right).$$

7. Tilfredsstill initsialbetingelsene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = g(x).$$

8. Finner $a_n$ og $b_n$. I dette tilfellet er $a_n$ Fourierkoeffisienter til odde periodisk utvidelse av $f(x)$, og $\frac{n\pi c}{L} b_n$ Fourierkoeffisienter til odde periodisk utvidelse av $g(x)$.

Viktig å forstå framgangsmåten, da den kan brukes på også andre likninger, eksempelvis varmelikninga.

## Fouriertransformasjon

## Eksempel:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \quad \text{for } -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

$u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$.

1. Fouriertransformer likninga med hensyn på $x$.

$$(ik)^2\hat{u}(k,t) - \frac{1}{c^2}\hat{u}(k,t)_{tt} = 0$$
$$-c^2k^2\hat{u}(k,t) - \hat{u}(k,t)_{tt} = 0$$

2. Løser denne ordinære differensiallikninga.

$$\hat{u}(k,t) = a(k)e^{ikct} + b(k)e^{-ikct}$$

3. Fouriertransformerer initsialbetingelsene og tilpasser disse

$$\hat{u}(k,0) = a(k) + b(k) = \hat{f}(k)$$
$$\hat{u}_t(k,0) = ikca(k) - ikcb(k) = \hat{g}(k)$$

Altså blir

$$a(k) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(k) + \frac{1}{c}\frac{\hat{g}(k)}{ik}\right) b(k) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(k) - \frac{1}{c}\frac{\hat{g}(k)}{ik}\right)$$

slik at

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(k) + \frac{1}{c}\frac{\hat{g}(k)}{ik}\right)e^{ikct} + \frac{1}{2}\left(\hat{f}(k) - \frac{1}{c}\frac{\hat{g}(k)}{ik}\right)e^{-ikct}.$$

varslot@math.ntnu.no

4. Løsningen finner vi ved invers Fouriertransform mhp. $k$.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k,t) e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \hat{f}(k) + \frac{1}{c} \frac{\hat{g}(k)}{ik} \right) e^{i(x+ct)k} dk \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \hat{f}(k) - \frac{1}{c} \frac{\hat{g}(k)}{ik} \right) e^{i(x-ct)k} dk \\
&= \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{x+ct} g(\xi) d\xi \\
&+ \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{x+ct} g(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2} \left[ f(x+ct) + f(x-ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Tilsvarende kan gjøres for andre likninger, eksempelvis varmelikninga.

varslot@math.ntnu.no

## Kapittel 12: Komplekse tall

- generelle regneregler
- grenseverdier
- derivasjon
- hva er en analyttisk funksjon?
- hvordan brukes Cauchy-Riemann-likningene?
- spesielle komplekse funksjoner: $e^z$, $\ln z$, $\sin z$, ...

## Kapittel 13: Kompleks integrasjon

- Hvordan definerer vi det komplekse linjeintegralet?
- Hvordan løses slike integral?
- Bruk av ML-ulikheten
- Bruk av Cauchys integralsetning

  $$\int_C f(z)dz = 0$$

  når $f$ er analyttisk og $C$ er enkel, lukket kurve.
- Hvordan brukes Cauchys integralsetning når området ikke er enkelt-sammenhengende?
- Cauchys integralformel:

  $$2\pi i f(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

  Også generaliseringen til de deriverte:

  $$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

varslot@math.ntnu.no

## Kapittel 14: Komplekse rekker

- Konvergenstest: hva menes med konvergens, og absolutt konvergens?

  Forholdstesten for generelle rekker, og anvendt på potensrekker er spesielt viktig.

- Hva er konvergensradius for potensrekke?
- Når har en kompleks funksjon ei Taylorrekke?
- Hvordan finner vi Taylorrekker?

## Kapittel 15: Laurentsrekker og Residue

- Hva er ei Laurentsrekke? Hvordan finner vi denne?
- Hva er et Residue? Hvordan finner vi Residuet til en funksjon?
- Bruk av Residue til å utføre lukkede kurveintegral.
- Bruk av Residue til å utføre integral, eksempelvis reelle integral av typen

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

  I denne sammenhengen er ML-ulikheten viktig.

Merk at Fouriertransformen er også et type integral som av og til kan løses enklest ved Residue-regning.

varslot@math.ntnu.no