KZ 5.3:

Heaviside-funksjonen

$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Merk at Kreyzig ikke definerer denne i $t = a$.

Regning rett fram etter nesen gir

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)u(t-a)\right] = e^{-sa}\mathcal{L}\left[f(t)\right].$$

Ved sette $f(t) = 1$ finner vi at

$$\mathcal{L}\left[1 \cdot u(t-a)\right] = e^{-sa}\frac{1}{s}.$$

Heaviside-funksjonen kan brukes til å skrive sammensatte funksjoner på en hensiktsmessig måte

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{t} & , t \geq 1 \\ 0 & , ellers \end{cases} = t\left[u(t-0) - u(t-1)\right] + \frac{1}{t}u(t-1)$$

Dirac's delta-funksjon

La

$$f_k(t-a) = \frac{1}{k}\left[u\left(t-a\right) - u\left(t-(a+k)\right)\right]$$

Da er:

$$I(f_k) = \int f_k(t-a)dt = 1$$

$$\mathcal{L}\left[f_k\right] = e^{-as}\frac{1-e^{-ks}}{ks}$$

varslot@math.ntnu.no

Dirac's deltafunksjon oppnås som grensen for f_k når $k \to 0$.

$$\lim_{k\to 0} f_k(t-a) = \delta(t-a).$$

Egenskaper:

- $$I(\delta(t-a)) = 1$$
- $$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] = e^{-as}$$
- $$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & ,t \neq a \\ \infty & ,t = a \end{cases}$$
- Ikke egentlig en funksjon, men en distribusjon!
- Kan betraktes som en *generalisert derivert* av Heaviside-funksjonen.
- La $f(t)$ være kontinuelig rundt $t = a$. Da er

$$\int f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$