Løsningsforslag Midtsemesterprøve H2003

Løsning oppgave 1

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Høyresiden kan skrives som

$$(t-1)u(t-1)$$

og vi får

$$\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{t\} = \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Den transformerte ligningen blir

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Vi løser og får:

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)} = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2+1},$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (t-1)u(t-1) - \sin(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ t-1-\sin(t-1), & t \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Løsning oppgave 2

Svaret blir:

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-i\omega/2}}{4+\omega^2}$$

Løsning oppgave 3

$$\sin^3 x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$$
$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Fourierkoeffisientene er unike! Altså blir $A_1 = \frac{3}{4}$ og $A_3 = -\frac{1}{4}$, og $A_n = 0$ for alle andre n.