Tillegg til løsningsforslag for øving 3 i TMA4120 Matematikk 4K

Marius Thaule

7. september 2003

Sammendrag

Jeg ønsker å gi en litt utfyllende forklaring til deloppgave c) tilhørende A-33, øving 3. Utgangspunktet er å forklare mer detaljert hvordan vi kan finne $\varphi(t)$, både ved hjelp av en grensebetraktning og ved å se på problemet med litt intuisjon.

Problemet

Vi blir spurt om å finne grenseverdien

$$\varphi(t) = \lim_{\alpha\to\infty} y_\alpha(t) \tag{1}$$

hvor $y_\alpha(t)$ er (forhåpentligvis) funnet i deloppgave b). Da jeg ønsker å være mest mulig uavhengig av de andre to deloppgavene i dette tillegget, nevner jeg at

$$\begin{aligned} y_\alpha(t) &= \alpha u(t-1)[1-\cos(t-1)] - \alpha u\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\left[1-\cos\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\right] \\ &= f_\alpha(t) + \alpha\left[u\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right) - u(t-1)\cos(t-1)\right] \end{aligned}$$

der hvor

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha & \text{dersom } t \in \left[1, 1+\frac{1}{\alpha}\right] \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi vet at $y_\alpha(t)$ tilfredstiller

$$(*)\begin{cases} y_\alpha''(t) + y_\alpha(t) = f_\alpha(t) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Oppgaven spør også etter hvilken differensialligningen $\varphi(t)$ tilfredstiller.

Løsning ved direkte utregning av grensen

Som sagt er vi interessert i hva som skjer når $\alpha \to \infty$. Vi har fra (1) at

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lim_{\alpha\to\infty} y_\alpha(t) \\ &= \lim_{\alpha\to\infty}\left(f_\alpha(t) + \alpha\left[u\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right) - u(t-1)\cos(t-1)\right]\right) \\ &= \lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(t) + \lim_{\alpha\to\infty}\alpha\left[u\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right) - u(t-1)\cos(t-1)\right] \\ &= \lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(t) - \lim_{\alpha\to\infty}\frac{u\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right) - u(t-1)\cos(t-1)}{-\frac{1}{\alpha}}\,. \end{aligned}$$

Nå ser dette veldig stort og stygt ut, men ved nærmere inspeksjon, er det faktisk ikke så ille. En rask titt i “Advanced Engineering Mathematics, 8th edition”, nærmere bestemt side 270 og 271, avslører at

$$\lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(t) = \delta(t-1)$$

som vi enkelt ser ved å bytte ut k med $\frac{1}{\alpha}$. Men hva så med det andre leddet? Ved å innføre noen hjelpestørrelser ser vi ganske straks et veldig kjent uttrykk. La derfor

$$h = -\frac{1}{\alpha}$$

og

$$g(t) = u(t)\cos(t) \ .$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(t) - \lim_{\alpha\to\infty} \frac{u\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(t-1-\frac{1}{\alpha}\right) - u(t-1)\cos(t-1)}{-\frac{1}{\alpha}} \\
&= \delta(t-1) - \lim_{h\to 0} \frac{g(t-1+h) - g(t-1)}{h} \\
&= \delta(t-1) - g'(t-1) \ .
\end{aligned}$$

Det som gjenstår er altså å finne $g'(t-1)$. Vi finner så

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=t-1} u(x)\cos(x) = u'(t-1)\cos(t-1) - u(t-1)\sin(t-1) \ .$$

Men vi er ikke helt i mål enda. For hva er $u'(t-1)$? Vi vet at

$$u(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{for } t > 1 \\ 0 & \text{for } t < 1 \end{cases}$$

slik at

$$u'(t-1) = \lim_{h\to 0} \frac{u(t-1+h) - u(t-1)}{h} = \delta(t-1) \ .$$

Med andre ord har vi at

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \lim_{\alpha\to\infty} y_\alpha(t) \\
&= \delta(t-1) - [\delta(t-1)\cos(t-1) - u(t-1)\sin(t-1)] \\
&= u(t-1)\sin(t-1) + \delta(t-1)[1-\cos(t-1)] \ .
\end{aligned}$$

Det siste leddet i uttrykket for $\varphi(t)$ er lik 0 for alle $t \neq 1$, mens i $t = 1$ får vi også 0 ettersom $\cos(1-1) = \cos(0) = 1$. Dermed har vi at

$$\varphi(t) = u(t-1)\sin(t-1) \tag{2}$$

som er første del av oppgaven. Det som gjenstår nå er å avgjøre hvilken differensialligningen denne oppfyller. Utgangspunktet for hele denne oppgaven er $(*)$, derfor trenger vi å se på hva som skjer når $\alpha \to \infty$ i $(*)$. Fra (2) observerer vi at $\varphi'(t) = u'(t-1)\sin(t-1) + u(t-1)\cos(t-1)$, slik at

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$$

akkurat som for $y_\alpha(t)$. Altså endres ikke initialbetingelsene. Hva så med selve differensialligningen? Vi lar $\alpha \to \infty$ slik at

$$\begin{gathered}
\lim_{\alpha\to\infty} [y''_\alpha(t) + y_\alpha(t)] = \lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(t) \\
\varphi''(t) + \varphi(t) = \delta(t-1)
\end{gathered}$$

det vil si, $\varphi(t)$ vil tilfredstille

$$(*') \begin{cases} \varphi''(t) + \varphi(t) = \delta(t-1) \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Løsning ved bruk av intuisjon

Istedenfor å angripe problemet forfra, med en direkte utregning av grenseverdien, la oss angripe problemet bakfra, ved å finne hvilken differensialligning $\varphi(t)$ tilfredstiller. Akkruat som sist, finner vi ved å la $\alpha \to \infty$, at

$$\varphi''(t) + \varphi(t) = \delta(t-1)$$

og tilsvarende at $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, det vil si at $\varphi(t)$ tilfredstiller $(*')$. Dette er en differensialligning som lett lar seg løse ved Laplacetransformasjon. Ved å transformere begge sidene får vi at

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\varphi''(t)\} + \mathcal{L}\{\varphi(t)\} &= \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} \\
s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) + \Phi(s) &= e^{-s} \\
(s^2+1)\Phi(s) &= e^{-s} \\
\Phi(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2+1}
\end{aligned}$$

ved vanlig bruk av Laplacetransformasjon. Ved å ta inverstransformasjonen av begge sider får vi at

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right\} \\
\varphi(t) &= u(t-1)\sin(t-1)
\end{aligned}$$

som selvfølgelig er det samme som (2).

Sluttkommentar

Vi har nå kommet fram til løsningen på to forskjellige måter, begge med sine fordeler. Et svært viktig poeng ved utregningen av grenseverdien er at

$$\delta(t-1) - \delta(t-1)\cos(t-1) = 0 \ \forall\ t$$

som essensielt blir som å si at $\infty - \infty = 0$, i dette tilfelle. Dette må ikke under noen omstendigheter generaliseres til å tro at $\infty - \infty = 0$ for alle tilfeller. Grunnen til at det holder her, er fordi

$$\delta(t-1) - \delta(t-1)\cos(t-1) = \delta(t-1)[1-\cos(t-1)]$$

hvilket betyr for $t = 1$, som er den eneste verdien for t hvor $\delta(t-1) \neq 0$, at

$$1 - \cos(1-1) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0\ .$$

Generelt kan du ikke si at $\infty - \infty = 0$.