Repetisjon av partielle diff. lign.

Kjente ligninger

Ligninger

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2\, u_{xx}, \quad \text{bølgeligning}\\
u_t &= c^2\, u_{xx}, \quad \text{varmeligning}\\
u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad \text{Laplaceligningen}
\end{aligned}
$$

Randbetingelser

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= g_l(t), \quad & u(L,t) &= g_r(t)\\
g_l(t) &= 0, & g_r(t) &= 0 \text{ (som regel).}
\end{aligned}
$$

Initialbetingelser

$$
u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).
$$

Løsningsmetode ($L < \infty$): Separasjon av variable

1. Skriv $u(x,t) = F(x)G(t) = X(x)T(t)$
2. Uttrykk u_t, u_x osv. vha. F, G. Sett inn i ligning og divider med $u = FG$.
3. Observer at hver side i modifisert ligning kun avhenger av én variabel (x eller t) og at ligningen derfor må være en konstant. Bruk dette til å finne to *ordinære* differensialligninger for hhv. F og G.
4. Løs F-ligningen (x-avhengighet) og tilpass til randbetingelser (bestem separasjonskonstant).
5. Løs G-ligning med funnet separasjonskonstant.
6. Still opp formell rekkeløsning og tilpass til initialbetingelser. Gir som regel en Fourierrekke.

Uendelig streng, Fouriertransform

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x),\ \hat{f}(w) = \mathscr{F}(f)(w) \text{ eksisterer}$$

Fouriertransformerer ligningen:

$$\mathscr{F}(u_t) = \hat{u}_t, \quad \mathscr{F}(u_{xx}) = (iw)^2\hat{u} = -w^2\hat{u}.$$

Løs transformert ligning

$$\hat{u}_t = -(cw)^2\hat{u}, \quad \hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$$

som gir $\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)\,\mathrm{e}^{-(cw)^2 t} = \hat{f}(w)\cdot\mathscr{F}\big(\frac{1}{\sqrt{2c^2t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4c^2t)}\big)$.
Inverstransformer vha. konvolusjonsintegral

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-(x-y)^2/(4c^2t)}\,\mathrm{d}y.$$