Midtsemesterprøve i TMA4120 Matematikk 4K, NTNU
Mandag 3. oktober 2005

Godkjente hjelpemidler: Rottmanns formelsamling, enkel kalkulator.
For hver oppgave gjelder: riktig markering gir 1 poeng, gal markering gir 0 poeng, mer enn et merke gir 0 poeng.

Oppgave 1. Finn $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ når

$$y'' + 2y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

der $r(t) = \begin{cases} 10\sin 2t & \text{for } \ 0 < t < \pi \\ 0 & \text{for } \ t > \pi \end{cases}$

a) $Y(s) = \frac{20(1-e^{-\pi s})}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$ b) $Y(s) = \frac{-20e^{-\pi s}}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$
c) $Y(s) = \frac{20e^{-\pi s}}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$ d) $Y(s) = \frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$
e) $Y(s) = \frac{-20}{((s-\pi)^2+4)(s^2+2s+2)}$ f) $Y(s) = \frac{20u(s-\pi)}{((s-\pi)^2+4)(s^2+2s+2)}$

Oppgave 2. Finn a_9 når $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$ er Fourier-rekken til den periodiske funksjonen $f(x)$ med periode 4 gitt ved

$$f(x) = |x| \quad \text{for} \quad -2 < x < 2.$$

a) $\dfrac{4}{81\pi^2}(18\pi - 1)$ b) $\dfrac{1}{81\pi^2}(18\pi - 1)$ c) $\dfrac{16}{81\pi^2}(9\pi - 1)$

d) $\dfrac{4}{81\pi^2}$ e) $-\dfrac{8}{81\pi^2}$ f) $-\dfrac{16}{81\pi^2}$

Oppgave 3. Ved å separere de variable i den partielle differensialligningen

$$y^2 u_x - x^2 u_y = 0$$

får vi

a) $F' = kx^2F, \quad \dot{G} - ky^2G = 0$ b) $F'y^2 = \dot{G}x^2$
c) $F'' - kF = 0, \quad \ddot{G} - kG = 0$ d) $y^2F''G = x^2\ddot{G}F$
e) $F' = kx^2F, \quad \dot{G} = cy^2G$ f) $F'' = kF, \quad \ddot{G} = cG$

Oppgave 4. Den periodiske funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 \text{ for } & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

har Fourierrekken

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots)$$

Parceval's identitet sier at $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$. Finn summen av rekken

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

a) 2 b) ∞ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{8}$ e) $\frac{\pi^2}{8}$ f) $\frac{\pi^2}{16}$

Oppgave 5. Ved separasjon av de variable i en partiell differensialligning er man kommet frem til ligningene

$$F'' + 4kF = 0 \qquad \text{og} \qquad \ddot{G} - kG = 0$$

med randbetingelsene $F(0) = 0$, $F(2) = 0$. Hvilken funksjon $u(x,t)$ nedenfor er absolutt **ikke** løsning av det opprinnelige randverdiproblemet?

a) $u(x,t) = e^{3\pi t} \sin 6\pi x - e^{-2\pi t} \sin 4\pi x$
b) $u(x,t) = e^{3\pi t} \sin 3\pi x \cos 3\pi x$
c) $u(x,t) = e^{\pi t} \sin 2\pi x - \frac{1}{2}e^{-\pi t} \sin 2\pi x$
d) $u(x,t) = e^{\pi t} \sin 2\pi x + \frac{1}{2}e^{-\pi t} \sin 2\pi x$
e) $u(x,t) = 0$
f) $u(x,t) = e^{3\pi t} \sin 3\pi x - e^{-3\pi t} \sin 3\pi x$

Oppgave 6. Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ 2 & \text{for } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\omega}(1 - e^{i\omega})$ c) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\omega} \sinh \omega$
d) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \omega}{\omega}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\omega}(2e^{i\omega} - e^{-i\omega})$ f) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\omega}(1 - 2e^{i\omega} + e^{-i\omega})$

FASIT: AEAEFF (Det blir ikke laget noe løsningsforlag)