Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

15. juni 2003

EKSAMENSOPPGAVER FOR TMA4120 MATEMATIKK 4K H-03
Del B: Kompleks analyse

Oppgave B-1

a) Finn de singulære punktene til funksjonen
$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 6z + 1}$$
og bestem residuene i disse.

b) Ved hjelp av substitusjonen $z = e^{i\theta}$ skal en beregne det reelle integralet
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}.$$

Oppgave B-2

a) Finn Laurentrekkene til funksjonen
$$f(z) = \frac{1}{z^5(1+z)}$$
om $z = 0$.

b) Beregn det komplekse linjeintegralet
$$\oint_{|z|=a} \frac{dz}{z^5(1+z)} \quad \text{for} \quad 0 < a < 1 \quad \text{og} \quad a > 1$$
der sirkelen $|z| = a$ gjennomløpes en gang i positiv omløpsretning.

Oppgave B-3

a) Finn polene til funksjonen
$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1},$$
og vis at dersom z_0 er en pol for $f(z)$, så er residuet i z_0 lik $\frac{1}{4}z_0$.

b) Regn ut verdien av integralet
$$\oint_C \frac{dz}{z^4 - 1}$$
hvor C er

1) sirkelen $|z| = \frac{1}{2}$ i positiv retning
2) sirkelen $|z-1| = \frac{1}{2}$ i positiv retning
3) sirkelen $|z+1+i| = 2$ i positiv retning
4) sirkelen $|z+i| = 3$ i postitiv retning.

Oppgave B-4

Bestem funksjonene $f(y)$ og $g(y)$ slik at den komplekse funksjonen
$$F(z) = U(x,y) + iV(x,y) = (x^2 - 2x + f(y)) + i(2xy + 2 + g(y))$$
blir analytisk og $F(0) = 0$.

Oppgave B-5

La $s > 0$ og $a > 0$ være gitt og definer
$$f(z) = \frac{e^{isz}}{(z - ai)^3}.$$

a) Finn de singulære punkter for f. Bestem type og beregn residuet.

b) La Γ_R betegne halvsirkelen med radius R i øvre halvplan. Vis at
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

c) Bestem
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{(x - ai)^3}\, dx$$
for $s > 0$, $a > 0$.
Hva blir verdien av dette integralet når $s < 0$ og $a > 0$?

Oppgave B-6

La R være rektangelet med hjørner $(-K, 0), (K, 0), (K, b), (-K, b)$.

a) Vis at integralene $\int e^{-z^2}\, dz$ langs de vertikale sidene i rektangelet går mot null når $K \to \infty$.

b) Vis at $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ for vilkårlig b. (Cauchys sats)

c) Finn Fourier-transformen til $f(x) = e^{-x^2}$ gitt at $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Oppgave B-7

a) Bestem integralet $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-k)(z-1/k)}$ der C er enhetssirkelen med positiv omløpsretning og k er et positiv reelt tall, $k \neq 1$.

b) Bruk resultatene under a) til å beregne integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k^2 - 2k\cos\theta} \quad \text{der } k \text{ er et positivt reelt tall, } k \neq 1.$$

(Vink: bruk substitusjon $z = e^{i\theta}$.)

Oppgave B-8

Vis at en analytisk (holomorf) funksjon i enhetsdisken ($|z| < 1$) som har konstant imaginærdel må være en konstant.

(Vink: Cauchy-Riemann ligningene.)

Oppgave B-9

Hvilke verdier kan integralet

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$$

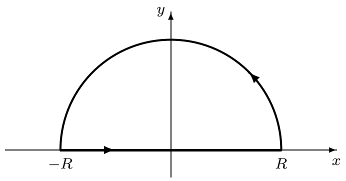
anta når C er en vilkårlig sirkel (positiv orientering) som ikke går gjennom $z = \pm i$?

Oppgave B-10

a) Hva er verdien av det komplekse integralet

$$\oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$$

når C_R (med $R > 1$) er den lukkede konturen på figuren?



b) La Γ_R være halvsirkelen $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$, og vis at $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 0$.

c) Bruk resultatene i a) og b) til å finne verdien av integralet $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$.

Oppgave B-11

Bestem $v(x,y)$ slik at den komplekse funksjonen

$$f(z) = x^2 + x - y^2 + iv(x,y)$$

blir analytisk og $f(0) = 0$. Uttrykk også $f(z)$ som et polynom i z.

Oppgave B-12

La C betegne sirkelen $|z| = 1$ (positivt orientert). Finn verdien av integralet

$$\oint_C z^n e^{1/z} dz$$

der n er et helt tall ≥ 0.
Bruk så Maclaurinrekken til e^z, og lovlighet av den leddvise integrasjonen som trengs, til å etablere formelen

$$\oint_C e^{z+1/z} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Oppgave B-13

For hvilken verdi av konstanten a er funksjonen

$$u(x,y) = ax^2 - 4y^2 + e^x \cos y$$

harmonisk? La a være lik denne verdien, og finn alle analytiske funksjoner $f(z) = f(x+iy)$ som har $u(x,y)$ som realdel.

Oppgave B-14

La C være kurven gitt ved $z(t) = x(t) + iy(t)$ for $0 \leq t \leq 1$, der

$$x(t) = t^2 \quad \text{og} \quad y(t) = \arctan t.$$

Beregn integralene

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz \quad \text{og} \quad \int_C z^2\,dz.$$

Oppgave B-15

Vis at dersom $f(z)$ er en analytisk funksjon med $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ for alle z, så er $f(z)$ konstant.

Oppgave B-16

Finn alle verdier av fjerderoten

$$\sqrt[4]{\frac{2i}{1+i}}.$$

Oppgave B-17

$$\int_0^{2\pi} \cos^{10}\theta \, d\theta = ? \qquad \text{(Hint: Eulers formel)}$$

Oppgave B-18
Betrakt uttrykket

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

a) Bestem rekkens konvergensradius.

b) Finn en ligning for koeffisienten c_n og beregn c_5.

Oppgave B-19
Finn integralet

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{1998}\,dz}{z-2000i}$$

der

a) C er sirkelen $|z-1000| = 4000$.

b) C er sirkelen $|z| = 10$.

Oppgave B-20
Finn Laurentrekka til funksjonen $f(z) = e^{(z+2)/(z-1)}$ om punktet $z = 1$, og finn verdien av integralet

$$\oint_C f(z)\,dz,$$

der C er sirkelen gjeven ved $|z| = 2$, gjennomløpt i positiv retning.

Oppgave B-21

a) Finn nullpunkta til polynomet $z^6 + 1 = 0$. La funksjonen $f(z)$ vere definert ved

$$f(z) = \frac{z^4}{z^6+1}.$$

Finn dei singulære punkta til $f(z)$, og vis at residuet til $f(z)$ i eit singulært punkt z_0 er $\dfrac{1}{6z_0}$.

b) La Γ_R vere halvsirkelen gjeven ved $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ og la kurva C_R vere samansett av intervallet $[-R, R]$ og kurva Γ_R, positivt gjennomløpt. Finn verdien av integralet

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz, \quad R > 1.$$

Vis ved direkte estimering at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

c) Finn verdien av integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(x^6+1)}\,dx.$$

Oppgave B-22
Funksjonen $f(z)$ er definert ved

$$f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 3}{(z-2)(z^2+1)}\ .$$

a) Finn løysingane til likninga $z^2 - 2iz + 3 = 0$.
Finn den Laurentrekka til $f(z)$ om $z = 2$ som gjeld nærast $z = 2$, og finn konvergensområdet for rekka.

b) La C_1 og C_2 vere sirklane $|z-2| = 1$ og $|z-2| = 3$.
Finn verdien av integrala

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz \quad \text{og} \quad \oint_{C_2} f(z)\,dz.$$

Oppgave B-23

a) Funksjonen f er definert ved

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z^2+3z+1)}\ .$$

Finn dei singulære punkta, og rekn ut residua.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\cos\theta}{3+2\cos\theta}\,d\theta$$

ved å bruke substitusjonen $z = e^{i\theta}$.

Oppgave B-24

Funksjonen $f(z)$ er definert ved $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Finn residuet til $f(z)$ i punktet $z_0 = 2$. Finn Laurentrekka til $f(z)$ om $z_0 = 2$ i området $|z-2| > 1$. Finn verdien av integralet $\oint_C f(z)\,dz$, der C er sirkelen definert ved $|z-2| = 2$ (positivt orientert).

Oppgave B-25

a) Finn Taylorrekka til funksjonen $f(z) = e^{3iz} - 3e^{iz} + 2$ omkring $z = 0$. Finn deretter Laurentrekka til funksjonen $g(z) = \dfrac{1}{z^3}\left[e^{3iz} - 3e^{iz} + 2\right]$ omkring $z = 0$.
Kva er konvergensområdet for denne rekka?

b) La Γ_R vere halvsirkelen definert ved $z = Re^{i\theta}$ $0 \le \theta \le \pi$, positivt orientert.
Vis at $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = 0$. Finn verdien av $\displaystyle\lim_{R\to 0}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz$.

c) Finn verdien av integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}\,dx.$$

Oppgave B-26

Bestem konstanten A slik at funksjonen

$$u(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + A(x^2+y^2), \quad x > 0,\ y > 0$$

blir harmonisk. Finn dei konjugert harmoniske funksjonane $v(x,y)$.

Oppgave B-27

a) Finn dei singulære punkta til funksjonen $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4iz - 1}$, og rekn ut residua.

b) Finn verdien av integralet

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}.$$

Oppgave B-28

Finn de to Laurentrekkene om $z = 0$ for funksjonen $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)(1+z)}$. Bestem verdien av integralene

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz \qquad \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

når C_1 og C_2 betegner sirklene $|z| = \frac{1}{2}$ og $|z| = \frac{3}{2}$ (begge positivt orientert).

Oppgave B-29

a) Sett $f(z) = e^{iz^2}$ og la Γ_R betegne sirkelbuen $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/4$.
Vis at $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$. (Hint: $\sin 2\theta \ge 4\theta/\pi$ når $0 \le \theta \le \pi/4$.)

b) La C_R betegne den lukkede kurven bestående av intervallet $[0,R]$ på x-aksen, sirkelbuen Γ_R og det rette linjestykket fra $Re^{i\pi/4}$ til 0.
Finn verdien av integralene $\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$ og $\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt$ ved å integrere $f(z)$ en gang rundt C_R og deretter la $R \to \infty$. Det oppgis at $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Oppgave B-30

a) Gitt funksjonen $f(z) = (z^2+1)^6/z^7$. Hvilken type singularitet har $f(z)$ i punktet $z = 0$? Begrunn svaret. Finn residuet til $f(z)$ i $z = 0$.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_0^{2\pi} \cos^6\theta\,d\theta$$

ved residuregning.

Oppgave B-31

Finn alle Laurentrekkene til funksjonen $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+2z)}$ om punktet $z_0 = -1$, og angi de åpne konvergensområdene for rekkene.

Bestem verdien av integralet

$$\oint_C f(z)\,dz$$

der C er en sirkel i positiv omløpsretning med sentrum i -1 og radius 2.

Oppgave B-32

La $a > 0$ og $\omega > 0$ være gitt. La $R > a$, og la C_R være den enkle lukkede kurven i det komplekse plan som består av det reelle intervallet fra $-R$ til R og halvsirkelbuen $z = Re^{i\theta}$ for $0 \le \theta \le \pi$ (positiv omløpsretning). Beregn

$$\oint_{C_R} \frac{e^{i\omega z}}{a^2+z^2}\,dz$$

og vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}e^{-a\omega} \quad \text{for alle } a > 0 \text{ og } \omega > 0.$$

Oppgave B-33
Løs ligningen

$$\sin z = 2.$$

Oppgave B-34

a) La $R > 2$, og la C_R være den enkle lukkede kurven i det komplekse plan som består av det reelle intervallet fra $-R$ til R og halvsirkelbuen $z = Re^{i\theta}$ for $0 \le \theta \le \pi$ (positiv omløpsretning). Bruk residuregning til å evaluere integralet

$$\oint_{C_R} \frac{z^2}{z^4+16}\,dz\,.$$

b) Finn verdien av det reelle integralet

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+16}\,dx\,.$$

Oppgave B-35
La $f(z)$ være en hel funksjon, det vil si, analytisk for alle z. Vis at dersom

$$|f(z)| \le M \cdot |z|^k \quad \text{for alle } z$$

for en fast konstant $M > 0$ og et fast heltall $k \ge 0$, så er $f(z)$ et polynom på formen $f(z) = cz^k$.

Oppgave B-36
Bestem integralet

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}$$

ved å benytte substitusjonen $z = e^{2i\theta}$.

Oppgave B-37
Finn Laurentrekken(e?) om $z_0 = 0$ til funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{z^2-1}}{z^3}$$

og bestem

$$\mathrm{Im}\left\{\int_C f(z)\,dz\right\}$$

der C er det rette linjestykket som går fra 1 til i.

Oppgave B-38
La Γ_R være halvsirkelbuen $z = Re^{i\theta}$ for $0 \le \theta \le \pi$, der R er en positiv konstant. Vis at

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 0.$$

Finn også

$$\lim_{R\to 0+}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz \quad \text{og} \quad \lim_{R\to 0+}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz.$$

Oppgave B-39
Bestem konstanten A slik at

$$u(x,y) = e^{-y}(x\cos x + Ay\sin x)$$

blir en harmonisk funksjon. Finn de analytiske funksjonene av $z = x+iy$ som har $u(x,y)$ som realdel.

Oppgave B-40
Finn alle Laurentrekkene med sentrum i $z_0 = 0$ til funksjonen

$$f(z) = \frac{z-1}{4z^4-1}$$

og angi gyldighetsområdene til hver av dem.

Oppgave B-41
Finn Fouriercosinustransformen

$$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt$$

til den jevne funksjonen

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

ved hjelp av residuregning. Forklar hvorfor $\widehat{f}(w)$ er en jevn funksjon.

Oppgave B-42
Finn alle Laurentrekker med sentrum i punktet $z_0 = 1$ til funksjonen $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-4)}$. Skriv opp konvergensområdet for kvar rekke. Finn verdien av integralet $\oint_C f(z)\,dz$, der C er sirkelen med radius $\frac{3}{2}$ og sentrum i $z = 2$, orientert mot urvisaren.

Oppgave B-43

a) Finn alle singulære punkt til funksjonen $f(z) = \dfrac{z}{z^5+1}$. Teikn figur. Rekn ut residuet til $f(z)$ i punktet $z_0 = e^{i\pi/5}$.

b) Rekn ut integralet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^5+1}$ ved å integrere langs randa til sirkelsektoren $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi/5$, $0 \le r \le R$, og så la $R \to \infty$. (Svaret skal skrivast på reell form.)

Oppgave B-44

Ved hjelp av substitusjonen $z = e^{i\theta}$ og integrasjon rundt sirkelen $|z| = 1$ skal ein rekne ut verdien av integralet $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - i\sin\theta}$, der a er eit vilkårleg positivt tal.

Oppgave B-45

La $P(z)$ og $Q(z)$ vere to polynom, der graden til $Q(z)$ er større enn eller lik 2 pluss graden til $P(z)$. Vis at

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{C_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0,$$

der C_r er sirkelen med sentrum i origo og radius r.

La $z_1, z_2, \ldots, z_m$ vere alle polane til $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Finn verdien av summen $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Oppgave B-46

Finn dei to Laurentrekkene til funksjonen $f(z) = \dfrac{1}{(i-z)(z-1)^2}$ omkring punktet $z = 1$, og avgjer kvar rekkene konvergerer.

Oppgave B-47

Funksjonen $f(z)$ er definert ved

$$f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{(z-i)^2}$$

der ω er eit positivt tall.
La R vere eit reelt tal, $R > 1$, la Γ_R vere halvsirkelen gjeven ved $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, og la C_R vere kurva samansett av Γ_R og intervallet frå $-R$ til R, med positiv orientering.

a) Finn verdien av integralet $\int_{C_R} f(z)\,dz$.

b) Vis at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Finn verdien av integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)\cos\omega x - 2x\sin\omega x}{(x^2+1)^2}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\cos\omega x + (x^2-1)\sin\omega x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Oppgave B-48

La ein funksjon $f(z)$ ha ein pol av orden m i punktet z_0. Vis at funksjonen $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ også har ein pol i z_0, og finn residuet av $\varphi(z)$ i z_0.

Oppgave B-49

Funksjonen $\varphi(z)$ er definert ved

$$\varphi(z) = \frac{1}{i - e^{2iz}}.$$

a) Finn alle singulære punkt til funkjonen $\varphi(z)$, vis at desse er polar, og avgjer ordenen til polane.

b) Rekn ut residuet til $\varphi(z)$ i alle polane. La C_1 vere sirkelen om origo med radius $\frac{1}{4}$ og C_2 sirkelen om origo med radius 1, begge positivt orientert. Finn verdien av integrala $\int_{C_1} \varphi(z)\,dz$ og $\int_{C_2} \varphi(z)\,dz$.

Oppgave B-50

Ved bruk av substitusjonen $z = e^{i\theta}$ og residurekning skal ein finne verdien av integralet

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{3\cos\theta - 5}.$$

Fasit

B-1 **a)** $z_1 = -3 - 2\sqrt{2}$, $z_2 = -3 + 2\sqrt{2}$, enkle poler

$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = -\frac{1}{8}\sqrt{2}$, $\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{8}\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$

B-2 **a)** $f(z) = \sum_{n=-5}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n$ for $0 < |z| < 1$, $f(z) = \sum_{n=6}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$ for $|z| > 1$

b) $2\pi i$ for $0 < a < 1$, 0 for $a > 1$

B-3 **a)** 1, -1, i, $-i$

b) 0, $\frac{\pi i}{2}$, $\frac{\pi}{2}(1-i)$, 0

B-4 $f(y) = -y^2$, $g(y) = -2y - 2$

B-5 **a)** $z = ai$, pol av orden 3; $\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z) = -\frac{1}{2}s^2e^{-as}$

c) $-\frac{1}{2}s^2e^{-as}$ for $s > 0$, $a > 0$, 0 for $s < 0$, $a > 0$

B-6 **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4}$

B-7 **a)** $\frac{-k}{|1-k^2|}$

b) $\frac{2\pi}{|1-k^2|}$

B-9 0, $\pm\pi$

B-10 **a)** π/e

c) π/e

B-11 $v(x,y) = 2xy + y$, $f(z) = z^2 + z$

B-12 $\frac{2\pi i}{(n+1)!}$

B-13 $a = 4$, $f(z) = 4z^2 + e^z + iC$

B-14 $\frac{1}{2} + i\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)$, $\frac{1}{3}\Big(1 + i\frac{\pi}{4}\Big)^3$

B-16 $2^{1/8}\Big(\cos\frac{(8k+1)\pi}{16} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{16}\Big)$, $k = 0, 1, 2, 3$ $\big(\approx \pm(1{,}07 \pm 0{,}21i)\big)$

B-17 $63\pi/128$

B-18 **a)** $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

b) $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ for $n \geq 3$; $c_5 = 5$

B-19 **a)** -2000^{1998}

b) 0

B-20 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n e}{n!\,(z-1)^n}$ for $|z-1| > 0$; $6\pi ie$

B-21 **a)** $e^{(2k+1)\pi i/6}$, $k = 0, 1, \ldots 5$

b) $2\pi/3$

c) $\pi/3$

B-22 **a)** $-i$, $3i$; $\frac{2-3i}{2-i}\cdot\frac{1}{z-2} + 2i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{(2-i)^{n+2}}$ for $0 < |z-2| < \sqrt{5}$

b) $2\pi(4+7i)/5$, $2\pi i$

B-23 **a)** 0, $\frac{1}{2}\big(-3 \pm \sqrt{5}\big)$; 1, $\mp\frac{3}{5}\sqrt{5}$

b) $\frac{2\pi}{5}\big(5 - 3\sqrt{5}\big)$

B-24 1; $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$; 0

B-25 **a)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3(3^{n-1}-1)}{n!}i^nz^n$; $\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{3(3^{n+2}-1)}{(n+3)!}i^{n+3}z^n$ for $0 < |z| < \infty$

b) $-3\pi i$

c) $-3\pi/2$

B-26 $0,\ \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$

B-27 a) $(-2\pm\sqrt{3})i;\quad \pm\dfrac{1}{2i\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

B-28 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-3}$ for $0<|z|<1$, $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-5}$ for $|z|>1$; $\quad 2\pi i,\ 0$

B-29 b) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},\quad \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

B-30 a) Pol av orden 7; 20

b) $5\pi/8$

B-31 $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{2n-1}$ for $0<|z+1|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{-2n-3}$ for $|z+1|>1$; $\quad 0$

B-32 $\dfrac{\pi}{a}e^{-\omega a}$

B-33 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

B-34 a) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

B-36 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

B-37 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-3}}{e\cdot n!}$ for $|z|>0$; $\quad \dfrac{\pi}{2e}$

B-38 $0,\ \pi i$

B-39 $A=-1,\ \ v(x,y)=e^{-y}(x\sin x+y\cos x)+C,\ \ f(z)=ze^{iz}+iC$

B-40 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z^{4n}-z^{4n+1}\right)$ for $|z|<1/\sqrt{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}\left(\frac{1}{z^{4n+3}}-\frac{1}{z^{4n+4}}\right)$ for $|z|>1/\sqrt{2}$

B-41 $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-|w|}$

B-42 $\displaystyle -\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+2}}$ for $0<|z-1|<3$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(z-1)^n}$ for $|z-1|>3$; $\quad -\dfrac{2\pi i}{3}$

B-43 a) $e^{(2k+1)\pi i/5},\ k=0,\ 1,\ \ldots 4;\quad -\frac{1}{5}e^{2\pi i/5}$

b) $\dfrac{\pi}{5\sin(2\pi/5)}$

B-44 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

B-45 0

B-46 $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+3}}$ for $0<|z-1|<\sqrt{2}$; $\displaystyle -\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(i-1)^{n-3}}{(z-1)^n}$ for $|z-1|>\sqrt{2}$

B-47 a) $-2\pi\omega e^{-\omega}$

b) $-2\pi\omega e^{-\omega},\quad 0$

B-48 $-m$

B-49 a) $\pi/4+k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$ enkle polar

b) $\frac{1}{2};\quad 0,\ \pi i$

B-50 $-\pi/4$