11.4 D'Alembert's metode for løsn. av bølgeligningen

Problem: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$
$u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$

IDÉ : Substitusjon ! $v = x + ct$, $z = x - ct$

$$w = u(x,t) = f(v,z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = c w_v - c w_z$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(c w_v - c w_z\right) = c^2\left(w_{vv} - 2w_{vz} + w_{zz}\right)$$

På tilsvarende måte : $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{vv} + 2w_{vz} + w_{zz}$$

Innsatt i ligningen:

$$c^2\left(w_{vv} - 2w_{vz} + w_{zz}\right) = c^2\left(w_{vv} + 2w_{vz} + w_{zz}\right)$$

$$\underline{w_{vz} = 0}$$

Løsning av $w_{vz} = 0$:

$$w_v = h(v)$$

$$w = \int h(v)\,dv + \psi(z) = \varphi(v) + \psi(z)$$

$$w = u(x,t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

der φ og ψ er vilkårlige, to ganger deriverbare funksjoner.